§ 2. Dichten für Punkte und Geraden.

Eine *Bewegung* in der Euklidischen Ebene wird in rechtwinkligen Punktkoordinaten x_1, x_2 durch eine Substitution folgender Art dargestellt:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_{10} + a_{11}\, x_1^* + a_{12}\, x_2^*, \\ x_2 &= a_{20} + a_{21}\, x_1^* + a_{22}\, x_2^* \end{aligned} \tag{13}$$

mit

$$\begin{aligned} a_{11} &= +\cos\alpha\,, & a_{12} &= -\sin\alpha\,, \\ a_{21} &= +\sin\alpha\,, & a_{22} &= +\cos\alpha\,, \end{aligned} \tag{14}$$

also

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +1\,. \tag{15}$$

Dabei deuten wir die x_1, x_2 als Koordinaten eines Punktes $\mathfrak{x}$ und die x_1^*, x_2^* als Koordinaten in bezug auf dasselbe Achsenkreuz für den entsprechenden Punkt $\mathfrak{x}^*$.

Wir suchen uns als „*Maß*" auf für die Punkte unserer Ebene ein Integral

$$\int_{\mathfrak{B}} f(x_1,\ x_2)\, \dot{x}_1\, \dot{x}_2\,, \tag{16}$$

das bei „beliebiger" Wahl des Bereichs $\mathfrak{B}$ gegenüber allen Bewegungen (13) invariant ist. Aus (15) folgt

$$\dot{x}_1\, \dot{x}_2 = \dot{x}_1^*\, \dot{x}_2^*\,, \tag{17}$$

und somit ergibt unsere Invarianzforderung

$$\int_{\mathfrak{B}} f(x_1^*,\ x_2^*)\, \dot{x}_1\, \dot{x}_2 = \int_{\mathfrak{B}} f(x_1,\ x_2)\, \dot{x}_1\, \dot{x}_2\,. \tag{18}$$

Da $\mathfrak{B}$ beliebig gewählt werden kann, folgt daraus notwendig

$$f(x_1,\ x_2) = f(x_1^*,\ x_2^*)\,.$$

Durch geeignete Wahl der Konstanten a_{ik} in (13) kann man einen festen Punkt $\mathfrak{x}$ in jede Lage bringen.[1]) Man drückt das so aus, daß man sagt: die Punkte der Euklidischen Ebene werden durch die Bewegungen *transitiv* vertauscht. Somit folgt aus (19) die Identität

$$f(x_1,\ x_2) = \text{konstant.} \tag{20}$$

Somit ist der Flächeninhalt

$$\boxed{F = \int_{\mathfrak{B}} \dot{x}_1\, \dot{x}_2} \tag{21}$$

(abgesehen von einem festen Faktor) das einzige invariante Punktmaß der Euklidischen Geometrie.

---

1) Schon die „*Schiebungen*" $x_i = a_{i0} + x_i^*$ reichen dazu aus.

VORLES[illegible]GE
[illegible]BE
INTEGRALGEOMETRIE

ERSTES HEFT

VON

WILHELM BLASCHKE
IN HAMBURG

1935
LEIPZIG UND BERLIN
VERLAG UND DRUCK VON B. G. TEUBNER

PRINTED IN GERMANY

Vorwort.

Wohlbeleibte Bücher sind heutzutage aus naheliegenden Gründen unbeliebt. Ich versuche deshalb diese Vorlesung, die der geometrischen Schönheit des Integralbegriffs gewidmet ist, ,,stotternd" erscheinen zu lassen. Dabei spielt auch die Hoffnung eine Rolle, weitere Mitarbeiter an dem reizvollen Gegenstand zu gewinnen zumal unter meinen Zuhörern, die diese Hefte neben der mündlichen Vorlesung benutzen. Wenn die Grundlagen dieses Zweigs der Geometrie noch nicht allen berechtigten Anforderungen an Allgemeinheit und Strenge genügen, so wird das hoffentlich nicht allzusehr den Reiz seiner saftigen Früchte schmälern. Am anziehendsten an diesem Stoff ist vielleicht das neue Licht, das hier auf Fragen fällt, die ich vor zwei Jahrzehnten in dem Büchlein ,,Kreis und Kugel" behandelt habe.

Das vorliegende erste Heft betrifft die ebene Euklidische Geometrie, das zweite, das ich jetzt vorbereite, die Geometrie auf der Kugelfläche. Zwei weitere sollen 1936 den Abschluß bringen.

An Vorkenntnissen ist nur einiges wenige an Infinitesimalrechnung und analytischer Geometrie erwünscht.

Das Schriftenverzeichnis am Schluß verdanke ich Herrn W. Burau, und bei der Korrektur haben mich die Herren K. Henke, E. Kähler und P. Walberer unterstützt.

Auf Hvar, den 13. September 1935.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung 1

I. Ebene Euklidische Geometrie.

§ 1. Mehrfache Integrale 3
§ 2. Dichten für Punkte und Geraden 5
§ 3. Kurvenlänge als Geradeninhalt 9
§ 4. Ein Invarianzsatz der Optik 13
§ 5. Treffgeraden zweier Eilinien 14
§ 6. Punktepaare, Geradenpaare 16
§ 7. Formeln von CROFTON für Eilinien 17
§ 8. Integrale der Sehnenpotenzen bei Eilinien 19
§ 9. Die kinematische Dichte 20
§ 10. Eine Formel POINCARÉS 23
§ 11. Isoperimetrie des Kreises nach SANTALÓ 25
§ 12. Anzahl der Strecken gegebener Länge, die einen Eibereich treffen . . . 27
§ 13. Anzahl der Eibereiche vorgeschriebener Gestalt, die einen festen treffen 28
§ 14. Weitere Ergebnisse SANTALÓs über starr bewegliche Linien 31
§ 15. MINKOWSKIS Ungleichheit für den gemischten Flächeninhalt 33
§ 16. Eine Formel im Stil von CROFTON für Punktetripel 36
§ 17. Aufgaben und Lehrsätze 38

Schriftenverzeichnis 44
Namen und Stichworte 46

Einleitung.

Die geometrischen Fragen, mit denen wir uns hier beschäftigen werden, entstammen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Man spricht von „*geometrischen Wahrscheinlichkeiten*", wenn die betrachteten Möglichkeiten von stetigen Veränderlichen abhängen.

Das klassische Beispiel etwa aus der Zeit von 1760 ist das sogenannte *Nadelproblem* von G. L. L. COMTE DE BUFFON. Auf einer wagerechten Tafel sind in gleichen Abständen parallele gerade Linien gezogen. Man werfe nun auf diese Tafel eine Nadel und frage nach der Wahrscheinlichkeit, daß sie in ihrer Ruhelage eine Linie trifft. Nimmt man an Stelle der Nadel ein wenig allgemeiner eine konvexe Scheibe, so tritt in die Rechnung das schon 1841 von A. CAUCHY betrachtete Integral

$$U = \int_{-\pi}^{+\pi} p(\varphi)\, d\varphi$$

ein, das gleich dem Umfang der Scheibe ist, wenn p den Abstand der Tangente (Stützgeraden) an die Scheibe in Richtung φ von einem festen Punkt der Scheibe bedeutet. Durch dieses Integral CAUCHYS wird nämlich in gewissem Sinn die „Anzahl" aller Geraden gemessen, die unsre Scheibe treffen.

Im dreidimensionalen Raum Euklids treten neben dem Punktinhalt von Figuren, der durch das Integral

$$V = \int dx\, dy\, dz$$

gemessen wird, zunächst noch zwei andere „*Maße*" auf, das *Ebenmaß*, ein dreifaches Integral, und das *Geradenmaß*, ein vierfaches Integral. Bei einem konvexen Körper ist das Ebenmaß gegeben durch das zuerst von J. STEINER 1840 betrachtete *Integral der mittleren Krümmung* und das Geradenmaß durch die *Oberfläche*. Als vielleicht wichtigstes Maß tritt dazu das „*Kinematische*", ein gewisses sechsfaches Integral, das zuerst 1896 von H. POINCARÉ benutzt wurde.

Die merkwürdigen Wechselbeziehungen zwischen solchen Integralen, zu denen man hier ganz notwendig geführt wird, sollen den Gegenstand dieser Vorlesung bilden, während die Beziehungen zur Wahrscheinlichkeitsrechnung zurücktreten. Daher auch die Wahl des Titels.

Während ich ein ausführliches *Schriftenverzeichnis* auf das Ende verschiebe, möchte ich hier nur das für uns Wichtigste hervorheben.

Grundlegend ist die besonders anziehende kurze Schrift von M. W. CROFTON, On the theory of local probability ..., Philosophical Transactions of the Royal Society **158** (1868), S. 181—199. An lehrbuchartigen Darstellungen gibt es zwei, nämlich E. CZUBER, Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte, Leipzig bei Teubner 1884 und R. DELTHEIL, Probabilités géométriques, Paris bei Gauthier-Villars 1926. Insbesondere habe ich aber hier vielfach eine besonders schöne Vorlesung von G. HERGLOTZ über geometrische Wahrscheinlichkeiten benutzt, die er in Göttingen im Sommerhalbjahr 1933 gehalten hat und von der mir eine Ausarbeitung zugänglich ist. Ich selbst habe im Winter 1934—35 und im Sommer 1935 in Hamburg über diesen Gegenstand Vorlesung gehalten und werde im Herbst 1935 in Sofia darüber lesen und habe zusammen mit Zuhörern von mir eine Reihe von Schriften unter dem Obertitel „*Integralgeometrie*“ zu veröffentlichen begonnen.

Mit dieser anspruchsvollen Benennung möchte ich auch andeuten, daß hier der „Differentialgeometrie“ verwandt und gleichwertig ein jüngerer Sproß der Geometrie zu wachsen begonnen hat, der mir wegen der Schönheit und Allgemeinheit seiner Ergebnisse und der Einfachheit seiner Mittel der Beachtung wert erscheint.

I. Ebene Euklidische Geometrie.

§ 1. Mehrfache Integrale.

Die von G. W. LEIBNIZ 1675 eingeführte Schreibweise für Integrale

$$J = \int_a^b f(x)\,dx \tag{1}$$

hat den wesentlichen Vorteil, daß bei Einführung einer neuen Integrationsveränderlichen

$$x = \varphi(\xi), \tag{2}$$

wobei φ etwa monoton wachsend und stetig differentiierbar sein soll, gewissermaßen von selbst das richtige Ergebnis herauskommt, nämlich

$$J = \int_\alpha^\beta f(\varphi(\xi))\,\varphi'(\xi)\,d\xi; \quad \varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b. \tag{3}$$

Man kann nun durch eine einfache *Vereinbarung* erreichen, daß dieser Vorteil auch bei mehrfachen Integralen erhalten bleibt, indem man nämlich fordert, daß die bei mehrfachen Integralen auftretenden formalen Produkte von Differentialen *alternierend* sein sollen, das heißt bei Vertauschung zweier benachbarter das Vorzeichen ändern sollen. Es sei nämlich (wir schreiben auch bei mehrfachen Integralen im allgemeinen nur *ein* Integralzeichen)

$$J = \int_{\mathfrak{B}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1\,dx_2 \ldots dx_n \tag{4}$$

und

$$x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{5}$$

Wir nehmen an, die Funktionen x_i seien im Gebiet $\mathfrak{B}^*$ des ξ_i-Raumes mit Einschluß des Randes von $\mathfrak{B}^*$ stetig differentiierbar, ihre Funktionaldeterminante

$$D = \left\| \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k} \right\| \neq 0 \tag{6}$$

in $\mathfrak{B}^*$ und das Abbild von $\mathfrak{B}^*$ im x_i-Raum sei das schlichte Integrationsgebiet $\mathfrak{B}$ von J. Dann wird

$$dx_i = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_k}\,d\xi_k, \tag{7}$$

und wir finden, wenn wir die Produkte der $d\xi_k$ als alternierend voraussetzen,

(8) $$dx_1\,dx_2\ldots dx_n = D\,d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_n.$$

Somit ergibt sich auch hier nach unserer Vereinbarung über das Alternieren der Produkte von Differentialen von selbst die richtige Substitutionsvorschrift für mehrfache Integrale, nämlich

(9) $$J = \int_{\mathfrak{B}^*} f(x_1(\xi), \ldots, x_n(\xi))\, D\,d\xi_1 \ldots d\xi_n.$$

Da wir nur erste Differentiale brauchen, wird neben der LEIBNIZschen Schreibweise hier auch zweckmäßig die an I. NEWTON angelehnte verwendbar sein, die wir erhalten, wenn wir an Stelle von

(10) $$dx_i = \dot{x}_i$$

schreiben. Es wird also im folgenden stets die *Vereinbarung*

(11) $$dx_i\,dx_k = \dot{x}_i\dot{x}_k = -\,\dot{x}_k\dot{x}_i$$

gelten, die uns das Schreiben langer Determinanten ersparen wird.

Unsre Vereinbarung kann ausgebaut werden zu einem Rechenverfahren mit „*äußeren Ableitungen*", das im Zusammenhang mit Gedanken von H. GRASSMANNS „Ausdehnungslehre", insbesondere von H. POINCARÉ und E. CARTAN ausgebildet wurde und auf das wir später zurückkommen werden. Hier in diesem ersten Teil wird die einfache *Vereinbarung über das Alternieren* ausreichen.[1])

Neben dieser Schreibweise werden wir im folgenden noch den *Satz über die Vertauschbarkeit der Integrationen* als wesentlichstes Beweismittel anzuwenden haben, der im einfachsten Fall so lautet:

(12) $$\int_a^b\int_c^d f(x, \varphi)\,\dot{x}\dot{y} = \int_c^d \dot{y}\int_a^b f(x, y)\,\dot{x} = \int_a^b \dot{x}\int_c^d f(x, y)\,\dot{y}.$$

Dies stimmt z. B. sicher, wenn der Integrand f stetig ist. Damit ist fast alles erschöpft, was im folgenden an mathematischem Handwerkszeug benötigt wird. Es kommt dazu nur noch einiges wenige über analytische Geometrie.

---

1) Alternierende Produkte von Differentialen wurden für die in diesem Buch vorliegenden Ziele zuerst angewandt von E. CARTAN, Le principe de la dualité ..., Bulletin de la Société Mathématique de France **24** (1896), S. 140—177. Eine moderne Darstellung dieser Rechenart bei E. KÄHLER, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, Leipzig bei Teubner 1934.

Wir nennen den Integranden eines invarianten Maßes eine *Dichte* und bezeichnen sie mit deutschen Buchstaben, also in unserem Fall

$$\dot{x}_1 \dot{x}_2 = \mathfrak{x}. \tag{22}$$

Wir werden also den Punkt (x_1, x_2) und seine Dichte $\dot{x}_1 \dot{x}_2$ mit demselben Buchstaben $\mathfrak{x}$ bezeichnen.

Genau so wie für Punkte können wir für die Geraden in der Ebene EUKLIDS (im wesentlichen, d. h. bis auf einen festen Faktor nur auf *eine* Art) eine Dichte einführen.

Eine Gerade $\mathfrak{g}$ können wir etwa festlegen durch einen ihrer Punkte $\mathfrak{x} = (x_1, x_2)$ und durch einen Einheitsvektor

$$\mathfrak{v} = (v_1, v_2) = (\cos\varphi, \sin\varphi) \tag{23}$$

senkrecht zu $\mathfrak{g}$. Dann, behaupten wir, ist

$$\boxed{\mathfrak{g} = (\dot{x}_1 \cos\varphi + \dot{x}_2 \sin\varphi)\, \dot{\varphi}} \tag{24}$$

die gewünschte Dichte. Dabei werden wir nachträglich zu zeigen haben, daß immer dieselbe Dichte $\mathfrak{g}$ entsteht, wie wir auch $\mathfrak{x}$ auf $\mathfrak{g}$ wählen (Wahlinvarianz).

Um zunächst nämlich die *Bewegungsinvarianz* einzusehen, genügt es zu beachten, daß beide Faktoren unseres alternierenden Produkts, nämlich

$$\dot{x}_1 \cos\varphi + \dot{x}_2 \sin\varphi = \dot{x}_1 v_1 + \dot{x}_2 v_2 \tag{25}$$

und $\dot{\varphi}$ einzeln gegenüber (13) erhalten bleiben.

Es ist nämlich

$$\dot{x}_1 = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}\, \dot{x}_k^*, \quad v_i = \sum_{k=1}^{2} a_{ik}\, v_k^* \tag{26}$$

und daraus

$$\sum \dot{x}_i\, v_i = \sum \dot{x}_i^*\, v_i^*. \tag{27}$$

Andrerseits können wir nach (13) setzen

$$\varphi = \varphi^* + \alpha, \tag{28}$$

und daraus fc lurch Ableitung

$$\dot{\varphi} = \dot{\varphi}^*. \tag{29}$$

An zweiter Stelle ist die *Wahlinvarianz* zu zeigen, daß nämlich die Dichte $\mathfrak{g}$ nicht von der Wahl des Punktes $\mathfrak{x}$ auf der Geraden $\mathfrak{g}$ abhängt. Wir nehmen auf $\mathfrak{g}$ einen anderen Punkt $\bar{\mathfrak{x}}$:

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= x_1 - r v_2, \\ \bar{x}_2 &= x_2 + r v_1 \end{aligned} \tag{30}$$

und finden

$$(31)\qquad \begin{aligned} \dot{\bar{x}}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{r} v_2 - r \dot{v}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 &= \dot{x}_2 + \dot{r} v_1 + r \dot{v}_1. \end{aligned}$$

Daraus ist weiter

$$(32)\qquad \dot{\bar{x}}_1 v_1 + \dot{\bar{x}}_2 v_2 = \dot{x}_1 v_1 + \dot{x}_2 v_2 - r (v_1 \dot{v}_2 - v_2 \dot{v}_1)$$

oder, da nach (23)

$$(33)\qquad \dot{\varphi} = v_1 \dot{v}_2 - v_2 \dot{v}_1$$

ist, folgt

$$(34)\qquad \dot{\bar{x}}_1 v_1 + \dot{\bar{x}}_2 v_2 = \dot{x}_1 v_1 + \dot{x}_2 v_2 - r \dot{\varphi}$$

und somit

$$(35)\qquad \bar{\mathfrak{g}} = (\dot{\bar{x}}_1 v_1 + \dot{\bar{x}}_2 v_2) \dot{\varphi} = (\dot{x}_1 v_1 + \dot{x}_2 v_2) \dot{\varphi} = \mathfrak{g}.$$

Dabei ist zu beachten, daß $\dot{\varphi}\dot{\varphi} = 0$ ist wegen des Alternierens unserer Produkte. In (35) ist die behauptete Wahlinvarianz enthalten.

Die Behauptung, daß die gefundene Geradendichte $\mathfrak{g}$ bis auf einen festen Faktor die einzige gegen (13) invariante ist, wird wie vorhin bei der Punktdichte aus der Tatsache hergeleitet, daß die Bewegungen (13) auch die Geraden *transitiv* vertauschen.

Wir geben noch *weitere Ausdrücke für die Geradendichte* $\mathfrak{g}$.

Setzen wir

$$(36)\qquad x_1 v_1 + x_2 v_2 = x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi = p,$$

wobei p den Abstand unserer Geraden vom Ursprung bedeutet, so finden wir

$$(37)\qquad \dot{x}_1 \cos\varphi + \dot{x}_2 \sin\varphi + (-x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi)\dot{\varphi} = \dot{p}$$

und somit nach (24)

$$(38)\qquad \boxed{\mathfrak{g} = \dot{p}\dot{\varphi}}.$$

Führen wir zweitens den Fußpunkt $\mathfrak{y}$ des Lotes vom Ursprung auf unsere Gerade $\mathfrak{g}$ ein

$$(39)\qquad (y_1, y_2) = (p v_1, p v_2),$$

so finden wir

$$(40)\qquad \begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{p} v_1 + p \dot{v}_1, \\ \dot{y}_2 &= \dot{p} v_2 + p \dot{v}_2 \end{aligned}$$

und daraus wegen (33) und $\dot{v}_1 \dot{v}_2 = 0$:

$$(41)\qquad \mathfrak{y} = \dot{y}_1 \dot{y}_2 = p \dot{p} (v_1 \dot{v}_2 - v_2 \dot{v}_1) = p \dot{p} \dot{\varphi}.$$

Danach ist also auch

$$\boxed{\mathfrak{g} = \frac{\mathfrak{y}}{p}}\,. \tag{42}$$

Unsere Gerade hat die Gleichung

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 = p \tag{43}$$

in den laufenden Koordinaten x_1, x_2. Ihre Schnittpunkte mit den Achsen sind demnach für $v_1 v_2 \neq 0$:

$$\left(a_1 = \frac{p}{v_1},\, 0\right) \quad \text{und} \quad \left(0,\, a_2 = \frac{p}{v_2}\right). \tag{44}$$

Daraus folgt

$$\boxed{\mathfrak{g} = + \dot{a}_1 \dot{v}_2 = - \dot{a}_2 \dot{v}_1}\,. \tag{45}$$

Schließlich noch eine weitere Formel für die Geradendichte $\mathfrak{g}$, die den Vorzug größerer Symmetrie besitzt. Wir denken uns die Gerade durch zwei ihrer Punkte mit dem Abstand t erklärt, so daß wir setzen können

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 - t \sin\varphi, \\ y_2 &= x_2 + t \cos\varphi. \end{aligned} \tag{46}$$

Daraus folgt für die Ableitungen

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{t} \sin\varphi - t \cos\varphi\, \dot{\varphi}, \\ \dot{y}_2 &= \dot{x}_2 + \dot{t} \cos\varphi - t \sin\varphi\, \dot{\varphi} \end{aligned} \tag{47}$$

und hieraus weiter

$$\dot{y}_1 \cos\varphi + \dot{y}_2 \sin\varphi = (\dot{x}_1 \cos\varphi + \dot{x}_2 \sin\varphi) - t\dot{\varphi}. \tag{48}$$

Durch Multiplikation linker Hand mit $\dot{x}_1 \cos\varphi + \dot{x}_2 \sin\varphi$ ergibt sich nach (24) die gewünschte symmetrische Formel

$$\boxed{\mathfrak{g} = - \frac{(\dot{x}_1 \cos\varphi + \dot{x}_2 \sin\varphi)\,(\dot{y}_1 \cos\varphi + \dot{y}_2 \sin\varphi)}{t}}\,. \tag{49}$$

Dabei sind $\dot{x}_1 \cos\varphi + \dot{x}_2 \sin\varphi$, $\dot{y}_1 \cos\varphi + \dot{y}_2 \sin\varphi$ die „Verrückungen" der Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ normal zu $\mathfrak{g}$ und t der Abstand dieser Punkte.

Es ist bemerkenswert, daß wir hier eigentlich immer *gerichtete* (= orientierte) Geraden verwendet haben, da der Normalenvektor v_1, v_2 und damit $\varphi \bmod 2\pi$ festgelegt wurde. In diesem Fall konnten wir auch p mittels (36) eindeutig erklären. Die Gleichungsform (43) unserer Geraden wird als die „Normalform HESSEs" bezeichnet.

Die *„Orientierung"* oder *„Ausrichtung"* einer Geraden in der Ebene kann auf zwei Arten erfolgen. Entweder, wie wir dies hier bisher gemacht haben, indem man dem Einheitsvektor $\mathfrak{v}$ ihrer Normalen einen be-

stimmten Sinn erteilt oder indem man den Einheitsvektor $\mathfrak{w}$ auf der Geraden festlegt. Den eindeutigen Zusammenhang dieser „inneren“ mit der früheren „äußeren“ Ausrichtung unserer Geraden kann man dadurch herstellen, daß man fordert

$$v_1 w_2 - v_2 w_1 = +1, \tag{50}$$

d. h. die Einheitsvektoren $\mathfrak{v}$, $\mathfrak{w}$ sollen ebenso aufeinanderfolgen wie die Einheitsvektoren auf den Achsen. Wir sagen, $\mathfrak{v}$ weist auf das *rechte* Ufer der durch Angabe von $\mathfrak{w}$ gerichteten Geraden $\mathfrak{g}$ (Fig. 1). Erklären wir den Abstand eines Punktes $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{g}$ durch die Formel

$$p - (x_1 v_1 + x_2 v_2) = p - (x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi), \tag{51}$$

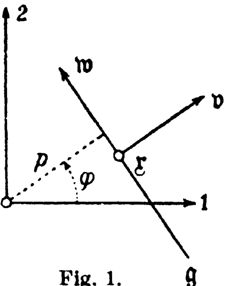


Fig. 1.

so ist dieser Abstand eindeutig erklärt. Punkte auf dem *linken* Ufer von $\mathfrak{g}$ haben positiven Abstand von $\mathfrak{g}$. Die gerichtete Gerade $\mathfrak{g}$ dreht also um die Punkte, die von ihr positiven Abstand haben, nach *links*. p ist der so gemessene Abstand des Ursprungs von $\mathfrak{g}$. Die Gesamtheit der (reellen) Geraden der Euklidischen Ebene ist durch die der gerichteten Geraden doppelt überdeckt.

Der Gedanke, neben den Punkten auch für die Geraden eine Dichte einzuführen, ist zuerst von M. W. CROFTON in der zu Anfang genannten Schrift von 1868 eingeführt worden. Die im wesentlichen eindeutige Bestimmtheit der Geradendichte durch ihre Invarianz gegenüber Bewegungen scheint zuerst von H. POINCARÉ in seiner Vorlesung über Wahrscheinlichkeitsrechnung von 1896 hervorgehoben zu sein und von E. CARTAN in der in § 1 genannten Arbeit aus demselben Jahre.

Wie überraschend fruchtbar CROFTONs Gedanke ist, wird sich in den folgenden Abschnitten erweisen, von denen § 3—§ 8 in der Hauptsache von CROFTON[1]) stammen.

§ 3. Kurvenlänge als Geradeninhalt.

Hat $\mathfrak{g}$ die in § 2 (24) erklärte Bedeutung der Geradendichte, so können wir das Doppelintegral

$$\int \mathfrak{g} \tag{52}$$

erstreckt über eine Menge von Geraden als „*Maß*“ oder nach CROFTON vielleicht auch als „*Anzahl*“ der Geraden dieser Menge uns verdeutlichen.

---

1) MORGAN WILLIAM CROFTON ist geboren in Dublin (Irland), von wo so hervorragende Geometer wie W. R. HAMILTON und G. SALMON hervorgegangen sind, am 27. 6. 1826 als Sohn des Reverend W. CROFTON. Er war von 1870—84 Professor für Mathematik und Mechanik in der Militärakademie London (Woolwich) und starb am 13. 5. 1915.

Wir gehen nun in diesem Sinne daran, *die Anzahl aller Geraden abzuzählen, die eine Kurve* $\mathfrak{K}$ *treffen*. Dabei wird die Geradendichte $\mathfrak{g}$ immer *positiv* in Rechnung zu stellen sein: $\mathfrak{g} = |\mathfrak{g}|$.[1]) $\mathfrak{K}$ sei gegeben durch die Funktionen

$$x_1 = x_1(t), \quad x_2 = x_2(t), \quad 0 \leqq t \leqq 1, \tag{53}$$

die wir etwa als stetig ableitbar nach t voraussetzen derart, daß die Ableitungen $x_1'(t)$, $x_2'(t)$ nie gleichzeitig verschwinden. Ferner soll etwa die Anzahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ mit einer beliebigen Geraden stets $\leqq$ einer festen Zahl N sein. Man nennt die kleinste Zahl N mit dieser Eigenschaft die „*Ordnung*" von $\mathfrak{K}$ (wohl auch „Realitätsordnung").

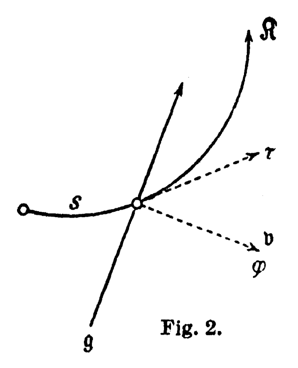


Fig. 2.

Wir wollen uns die Geraden $\mathfrak{g}$ zunächst gerichtet denken und nur die von einem Punkt $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{K}$ ausgehenden betrachten, die aufs linke Ufer von $\mathfrak{K}$ weisen, sobald man auf $\mathfrak{K}$ in Richtung wachsender s fortschreitet (Fig. 2). Dann haben wir, wenn s die Bogenlänge von $\mathfrak{K}$ und τ den Winkel der Kurventangente mit der x-Achse bedeutet,

$$x_1'\dot{t} = \dot{s}\cos\tau, \quad x_2'\dot{t} = \dot{s}\sin\tau; \quad \tau - \frac{\pi}{2} \leqq \varphi \leqq \tau + \frac{\pi}{2}. \tag{54}$$

Wenn wir in das Integral (52) die Veränderlichen t, φ einführen, so wird

$$\int_0^1 \int_{\tau-\frac{\pi}{2}}^{\tau+\frac{\pi}{2}} (x_1' \cos\varphi + x_2' \sin\varphi)\,\dot{t}\,\dot{\varphi} = \int n\,\mathfrak{g}, \tag{55}$$

wobei n die Anzahl der „positiven" Schnittpunkte der gerichteten Geraden $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{K}$ ist, an denen $\mathfrak{g}$ auf das linke Ufer von $\mathfrak{K}$ weist. Wir finden, wenn wir s und φ als Integrationsveränderliche nehmen,

$$\int n\,\mathfrak{g} = \int_0^L \int_{\tau-\frac{\pi}{2}}^{\tau+\frac{\pi}{2}} \cos(\tau - \varphi)\,\dot{s}\,\dot{\varphi}, \tag{56}$$

wenn L die Länge von $\mathfrak{K}$ bedeutet. Wegen

$$\int_{\tau-\frac{\pi}{2}}^{\tau+\frac{\pi}{2}} \cos(\tau-\varphi)\,\dot{\varphi} = -\left[\sin(\tau-\varphi)\right]_{\tau-\frac{\pi}{2}}^{\tau+\frac{\pi}{2}} = \left[\sin(\varphi-\tau)\right]_{\tau-\frac{\pi}{2}}^{\tau+\frac{\pi}{2}} = 2 \tag{57}$$

1) *Die Festsetzung, daß die Dichten positiv zunehmen, sind gilt im folgenden durchweg*. Erst bei feineren Untersuchungen würden die Vorzeichen eine Rolle spielen.

erhalten wir aus (55)

(58) $$\int n\,\mathfrak{g} = 2L.$$

Betrachten wir zwei gegensinnig zusammenfallende gerichtete Geraden $\mathfrak{g}_1$, $\mathfrak{g}_2$ und n_1, n_2 ihre im früheren Sinn „positiven" Schnittpunktzahlen mit $\mathfrak{K}$. Dann ist

(59) $$n_1 + n_2 = n$$

die Gesamtzahl der Schnittpunkte der nicht gerichteten Geraden $\mathfrak{g}$, die mit den $\mathfrak{g}_i$ zusammenfällt, mit $\mathfrak{K}$.

Damit finden wir CROFTONs Ergebnis:

Für die ungerichteten Geraden g, die eine ebene Kurve $\mathfrak{K}$ treffen, ergibt sich

(58) $$\boxed{\int n\,\mathfrak{g} = 2L},$$

wenn n die Schnittpunktzahl von $\mathfrak{g}$ *mit $\mathfrak{K}$ und L die Länge von $\mathfrak{K}$ ist.* Dabei tritt in (58) rechts kein neuer Faktor 2 auf, da jede ungerichtete Gerade genau zwei gerichtete trägt.

Bei dieser Überlegung wären die Tangenten an $\mathfrak{K}$ besonders zu behandeln. Aber die machen nichts aus, da ihr Maß Null ist. Die Formel (58) gilt für jeden Kurvenbogen, der den Voraussetzungen (53) genügt. Der Gültigkeitsbereich erweitert sich aber sofort auf jede „Kurve", die sich in beliebiger Weise aus endlich vielen solchen Bögen zusammensetzt.

Wenden wir uns insbesondere dem einfachen Sonderfall zu, daß $\mathfrak{K}$ eine *Eilinie* ist, d. h., wie man auch sagt, eine geschlossene konvexe Kurve, also eine geschlossene Kurve der Ordnung 2. Für Eilinien gilt nach (58)

(60) $$\boxed{\int \mathfrak{g} = U},$$

wenn U den Umfang der Eilinie bedeutet und wenn wir wieder das Integral über alle (ungerichteten) Geraden erstrecken, die die Eilinie treffen. Insbesondere ist das Maß aller Geraden, die eine Strecke treffen, gleich ihrer doppelten Länge, wie man aus (58) oder (60) folgert.

Von der Formel (60) von CROFTON ausgehend kommt man in einfacher Weise zu der eingangs erwähnten Formel von CAUCHY für den Umfang einer Eilinie. Erinnern wir uns nämlich an (38), daß $\mathfrak{g} = \dot{p}\,\dot{\varphi}$ war, und erstrecken wir die Integration (etwa unter der Annahme, der Ursprung liege im Innern der Eilinie) nach p von Null bis $p(\varphi)$, so finden wir

(61) $$\boxed{U = \int_0^{2\pi} p(\varphi)\,d\varphi},$$

und das ist die Formel von CAUCHY.[1]) Darin bedeutet $p(\varphi)$ die „*Stützfunktion*“, die den Abstand der Tangente vom Ursprung in der Abhängigkeit von ihrer Richtung angibt.

Wenn wir nun wieder eine „beliebige“ offene oder geschlossene Linie $\mathfrak{K}$ betrachten, so folgt sofort, daß das Integral

$$(62) \qquad \int\limits_{\mathfrak{g}\mathfrak{K}\neq 0} \mathfrak{g} = \bar{U}$$

ist. Dabei deutet $\mathfrak{g}\,\mathfrak{K}$ den *Durchschnitt* von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{K}$ an und $\bar{U}$ den Umfang der „konvexen Hülle“ $\bar{\mathfrak{K}}$ von $\mathfrak{K}$, d. h. die Randlänge des kleinsten Eigebiets, das $\mathfrak{K}$ enthält (vgl. die Fig. 3). Die Begrenzung von $\bar{\mathfrak{K}}$ kann man sich mechanisch als Lage eines geschlossenen elastischen Fadens vorstellen, der um $\mathfrak{K}$ gespannt wird (in der Fig. 3 punktiert). Es trifft nämlich jede Gerade, die $\mathfrak{K}$ trifft, auch $\bar{\mathfrak{K}}$, und es gibt keine Gerade, die $\bar{\mathfrak{K}}$ trifft, ohne $\mathfrak{K}$ zu treffen. Diese Eigenschaft ist neben der Konvexität für die konvexe Hülle kennzeichnend.

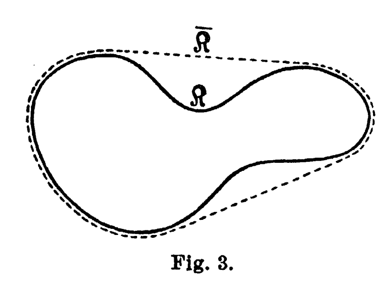


Fig. 3.

An diesem Beispiel sieht man zum erstenmal, wie die Fragen der Integralgeometrie eng mit der *Lehre von den konvexen Gebilden* verknüpft sind, die seit ARCHIMEDES ein beliebtes Betätigungsfeld der Geometer gebildet hat, das wir hier noch oft streifen werden und über das man sich in einer kürzlich (1934) von BONNESEN und FENCHEL erschienenen ausgezeichneten Schrift unterrichten kann.[2])

Wir haben über die betrachteten Kurven erhebliche Einschränkungen gemacht, die sich leicht abschwächen ließen, z. B. wenn man unter n die Anzahl der getrennten Strecken betrachtet, aus denen der Durchschnitt $\mathfrak{K}\mathfrak{g}$ besteht, wie das bei J. HJELMSLEV geschieht. Auch könnte man die „Länge“ einer Punktmenge $\mathfrak{K}$ durch das Integral (56) einführen, wie das H. LEBESGUE und J. FAVARD getan haben. Wir wollen aber in diesem Büchlein lieber enge Voraussetzungen in Kauf nehmen, um uns nicht durch das Gestrüpp mengentheoretischen Kleinkrams den Aufstieg zu „anschaulichen“ Ergebnissen zu erschweren. Allerdings ist der Begriff der „Anschaulichkeit“ sehr unbestimmt, da die meisten Geometer ihr eigenes Arbeitsgebiet (oder das des eigenen Volkes) als „anschaulich“ und das der andern als „abstrakt“ oder „formal“ anzusehen pflegen. Immerhin wäre es aber doch wohl lohnend, die Grundlagen unserer Integralgeometrie in zweckmäßigerer Allgemeinheit zu klären und auszubauen.

---

1) A. CAUCHY, Note sur divers théorèmes relativs à la rectification . . ., C. R. Paris **13** (1841), S. 1060—65.

2) T. BONNESEN und W. FENCHEL, Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Mathematik . . ., **3**, Berlin bei J. Springer 1934.

Noch eine *Bemerkung*. Zählt man die Schnittpunktszahl einer offenen gerichteten Kurve $\mathfrak{K}\{x_i(t)\}$; $0 \leqq t \leqq 1$ mit dem Anfangspunkt $x(0)$ und dem Endpunkt $x(1)$ mit einer gerichteten Geraden $\mathfrak{g}$ bei der Berechnung von n mit $+1$ etwa, wenn $\mathfrak{g}$ ins linke Ufer von $\mathfrak{K}$ eintritt, und sonst mit -1, so ergäbe sich als Wert von $\int n\,\mathfrak{g}$ die doppelte Entfernung der Punkte $x(0)$ und $x(1)$.

§ 4. Ein Invarianzsatz der Optik.

Hier soll jetzt auf einen Zusammenhang unsrer Überlegungen mit der geometrischen Optik hingewiesen werden.

Nehmen wir in unserer Ebene eine feste Kurve $\mathfrak{K}$, deren Punkte $\mathfrak{x}(s)$ auf die Bogenlänge s von $\mathfrak{K}$ bezogen sind. Dann können wir (im Kleinen) eine Gerade $\mathfrak{g}$ der Ebene durch einen Schnittpunkt $\mathfrak{x}$ mit $\mathfrak{K}$, also durch Angabe des zugehörigen s und durch die Richtung φ ihrer Normalen festlegen. Für die Dichte $\mathfrak{g}$ haben wir dann nach (56) gefunden

$$\mathfrak{g} = \cos(\tau - \varphi)\, \dot{s}\, \dot{\varphi}, \tag{63}$$

wenn τ die Tangentenrichtung in $\mathfrak{x}$ an $\mathfrak{K}$ angibt. Setzen wir (vgl. die Fig. 4)

$$\varphi + \frac{\pi}{2} = \gamma, \qquad \tau - \frac{\pi}{2} = \nu, \tag{64}$$

Fig. 4.

worin γ die Richtung der Geraden $\mathfrak{g}$ und ν die Richtung der Normalen an $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{x}$ angibt, so haben wir

$$\vartheta = \gamma - \nu = \pi - (\tau - \varphi), \tag{65}$$

wenn ϑ den „Einfallswinkel", d. h. den Winkel zwischen der Kurvennormalen und $\mathfrak{g}$ bedeutet. Somit ist

$$\boxed{\mathfrak{g} = -\cos\vartheta \cdot \dot{s}\,\dot{\varphi}}\,. \tag{66}$$

Führen wir auch noch die *Krümmung* von $\mathfrak{K}$ in x ein, nämlich

$$\frac{\dot{\tau}}{\dot{s}} = \frac{1}{r}, \tag{67}$$

so können wir (66) so umformen:

$$\mathfrak{g} = +r \cdot d\sin\vartheta \cdot d\varphi. \tag{68}$$

Wir wollen nun annehmen, die „Strahlen" $\mathfrak{g}$ sollen an der Kurve $\mathfrak{K}$ nach dem *Brechungsgesetz von Snellius* „gebrochen" werden. Mit anderen Worten ohne physikalische Einkleidung: Jeder Geraden $\mathfrak{g}_1$ durch $\mathfrak{x}(s)$

mit dem Einfallswinkel ϑ_1 wird eine andre $\mathfrak{g}_2$ durch denselben Punkt $\mathfrak{x}(s)$ von $\mathfrak{K}$ derart zugeordnet, daß

$$- \frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{c_1}{c_2} \tag{69}$$

fest ist. Die c_i sind die Lichtgeschwindigkeiten an beiden Ufern von $\mathfrak{K}$.

Wir finden nach (63)

$$\frac{\mathfrak{g}_1}{\mathfrak{g}_2} = - \frac{c_1}{c_2}. \tag{70}$$

Das heißt also: *Bei Brechung ist unsre Dichte bis auf einen festen Faktor invariant.*

Lassen wir einen Strahl durch ein optisches Instrument (der ebenen Optik) durchwandern, wobei der Strahl schließlich wieder in das Ausgangsmedium zurückkehrt, so haben wir wegen $c_1 = c_n$

$$\frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{c_2}{c_3} \cdots \frac{c_{n-1}}{c_n} = 1 \tag{71}$$

und finden:

Bei Durchgang durch ein optisches Instrument ist die Strahlendichte, abgesehen vom Vorzeichen, invariant.

Aus (70) ergibt sich insbesondere für den Fall einer *Spiegelung an einer Kurve* $\mathfrak{K}$

$$\mathfrak{g}_1 = - \mathfrak{g}_2. \tag{72}$$

Das gefundene Ergebnis ist ein Sonderfall allgemeiner Sätze aus der Optik (oder der Variationsrechnung), die am allgemeinsten von LIOUVILLE, H. POINCARÉ und E. CARTAN gefaßt wurden und auf die ich noch zurückzukommen hoffe.

Es wäre vielleicht zu untersuchen, ob und wieweit sich „jede" Geradentransformation $\mathfrak{g}_1 \rightarrow \mathfrak{g}_2$ in der Ebene unter geeigneten Regularitätsannahmen durch eine Folge von Spiegelungen an Kurven verwirklichen läßt, wenn bei dieser Transformation die Dichte invariant ist.

§ 5. Treffgeraden zweier Eilinien.

Wir kehren zum Gegenstand von § 3 zurück und suchen nach CROFTON die „Anzahl" aller Geraden, die zwei Eilinien $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ gleichzeitig treffen.

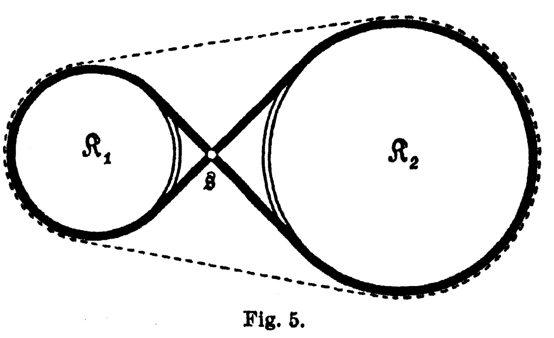


Fig. 5.

Wir nehmen zunächst an, $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ liegen getrennt, haben also zwei „innere" Tangenten gemein, deren Schnittpunkt $\mathfrak{s}$ heißen soll (Fig. 5). Die konvexe Hülle (§ 3) einer Punktmenge $\mathfrak{M}$ soll $\overline{\mathfrak{M}}$ heißen, und wir führen die Benennung

$$\overline{\mathfrak{K}_i + \mathfrak{s}} = \mathfrak{K}_i^* \tag{73}$$

ein.

Wir betrachten die Summe der Treffgeraden von $\mathfrak{K}_1^*$ und derer von $\mathfrak{K}_2^*$. Sie enthält nur die Treffgeraden der Hülle $\overline{\mathfrak{K}_1^* + \mathfrak{K}_2^*} = \overline{\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2}$, und zwar genau alle die Geraden doppelt, die sowohl $\mathfrak{K}_1^*$ wie $\mathfrak{K}_2^*$ treffen. Somit gilt für die zugehörigen Geradenanzahlen

$$U(\mathfrak{K}_1^*) + U(\mathfrak{K}_2^*) = U(\overline{\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2}) + U_{12}, \tag{74}$$

wenn wir mit U_{12} die gesuchte Anzahl der gemeinsamen Treffgeraden von $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ oder, was dasselbe ist[1]), von $\mathfrak{K}_1^*, \mathfrak{K}_2^*$ bezeichnen. Somit folgt

$$U_{12} = U(\mathfrak{K}_1^*) + U(\mathfrak{K}_2^*) - U(\overline{\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2}). \tag{75}$$

Da nach § 3 die Anzahl der Treffgeraden einer konvexen Punktmenge gleich ihrem Umfang ist, finden wir das Ergebnis von CROFTON *(Seilliniensatz)*:

Die Anzahl U_{12} der Geraden, die sowohl $\mathfrak{K}_1$ wie $\mathfrak{K}_2$ treffen, ist gleich dem Umfang der gekreuzten Seillinie $U(\mathfrak{K}_1^*) + U(\mathfrak{K}_2^*)$, die $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ umschließt, minus dem Umfang der glatten Seillinie $U(\overline{\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2})$ um $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$.

Als *Seillinien* sind dabei die Gleichgewichtslagen geschlossen elastischer Bänder um die Eilinien $\mathfrak{K}_i$ bezeichnet. In der Fig. 5 ist die glatte Seillinie punktiert und die gekreuzte dick.

Wenn $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ sich schneiden, findet man ähnlich

$$U_{12} = U(\mathfrak{K}_1) + U(\mathfrak{K}_2) - U(\overline{\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2}). \tag{76}$$

Bestimmen wir noch die *Anzahl der Geraden, die zwischen $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ laufen.* Wir finden dafür

$$\begin{aligned} &\{U(\mathfrak{K}_1^*) - U(\mathfrak{K}_1)\} + \{U(\mathfrak{K}_2^*) - U(\mathfrak{K}_2)\} \\ &= \{U(\mathfrak{K}_1^*) + U(\mathfrak{K}_2^*)\} - \{U(\mathfrak{K}_1) + U(\mathfrak{K}_2)\}. \end{aligned} \tag{77}$$

In Worten:

Die Anzahl der Geraden, die $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ trennen, ist gleich dem Umfang der gekreuzten Seillinie um $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ weniger der Summe der Umfänge der $\mathfrak{K}_i$.[2])

Für die Anzahl der Geraden, die die Hyperbel

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

nicht treffen, findet CROFTON den Wert

$$4 \int_0^{\operatorname{arc\,tg} \frac{a}{b}} \sqrt{a^2 \cos^2 \vartheta - b^2 \sin^2 \vartheta}\, d\vartheta. \tag{78}$$

---

1) Das stimmt bis auf die Geraden durch $\mathfrak{z}$, und diese haben das Maß Null.

2) Diese Ergebnisse in der Arbeit von CROFTON, Phil. Trans. 158 (1868), Nr. 5, 6, 7, S. 185—186.

Den Fall von drei und mehr Eilinien und ihren gemeinsamen Treffgeraden hat CROFTONs Vorgänger im Lehramt an der Militärakademie in Woolwich, der witzige und bewegliche Jude J. J. SYLVESTER behandelt.[1]) Es ergeben sich dabei schon bei drei Eilinien zahlreiche Fallunterscheidungen.

§ 6. Punktepaare, Geradenpaare.

Wir nehmen ein *Paar von Punkten* $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ an, betrachten die zugehörigen Punktdichten

(79) $$\mathfrak{x} = \dot{x}_1\dot{x}_2, \quad \mathfrak{y} = \dot{y}_1\dot{y}_2$$

und wollen aus ihrem alternierenden Produkt $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ die Dichte $\mathfrak{g}$ ihrer Verbindungsgeraden als Faktor herausziehen. Gibt φ die Normalenrichtung zu $\mathfrak{g}$ wie in § 3, so haben wir

(80) $$\mathfrak{x} = (\dot{x}_1 \cos\varphi + \dot{x}_2 \sin\varphi)\,(-\dot{x}_1 \sin\varphi + \dot{x}_2 \cos\varphi),$$
$$\mathfrak{y} = (\dot{y}_1 \cos\varphi + \dot{y}_2 \sin\varphi)\,(-\dot{y}_1 \sin\varphi + \dot{y}_2 \cos\varphi).$$

Für das Produkt folgt dann mittels (49)

(81) $$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = +\,t\,\mathfrak{g}(-\dot{x}_1 \sin\varphi + \dot{x}_2 \cos\varphi)(-\dot{y}_1 \sin\varphi + \dot{y}_2 \cos\varphi).$$

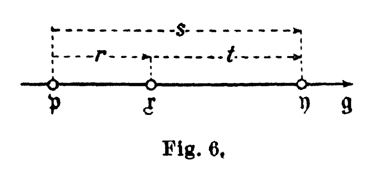


Fig. 6.

Wählen wir auf jeder Geraden $\mathfrak{g}(u, v)$ einen Punkt $\mathfrak{p}(u, v)$, wobei u, v „beliebige" Parameter bedeuten! Dann können wir setzen (Fig. 6):

(82) $$x_1 = p_1 - r \sin\varphi, \quad y_1 = p_1 - s \sin\varphi,$$
$$x_2 = p_2 + r \cos\varphi, \quad y_2 = p_2 + s \cos\varphi$$

und finden daraus

(83) $$-\dot{x}_1 \sin\varphi + \dot{x}_2 \cos\varphi = -\dot{p}_1 \sin\varphi + \dot{p}_2 \cos\varphi + \dot{r},$$
$$-\dot{y}_1 \sin\varphi + \dot{y}_2 \cos\varphi = -\dot{p}_1 \sin\varphi + \dot{p}_2 \cos\varphi + \dot{s}.$$

Nun ist aber

(84) $$\mathfrak{g}\dot{p}_1 = \mathfrak{g}\dot{p}_2 = 0,$$

denn $\mathfrak{g}$ enthält den Faktor $\dot{u}\dot{v}$ und $\dot{p}_1$ ist eine Linearkombination von $\dot{u}$, $\dot{v}$. Daher ergibt sich

(85) $$\mathfrak{x}\mathfrak{y} = t\,\mathfrak{g}\,\dot{r}\dot{s}$$

oder

(86) $$\boxed{\mathfrak{x}\mathfrak{y} = (s - r)\,\mathfrak{g}\,\dot{r}\dot{s}}\,.$$

1) J. J. SYLVESTER, On a funicular solution of Buffons „Problem of the needle ...", Acta Mathematica 14 (1890—91) S. 185—205. Dort zu Anfang und zu Ende der Arbeit einige geschichtliche Angaben.

Dabei ist t die Entfernung von $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}$, und $\dot{r}$ können wir als *Dichte von* $\mathfrak{x}$ *in* $\mathfrak{g}$, $\dot{s}$ als *Dichte von* $\mathfrak{y}$ *in* $\mathfrak{g}$ bezeichnen.

Leiten wir nun die entsprechenden Formeln für *Geradenpaare* her. Nehmen wir zwei Geraden $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ durch denselben Punkt $\mathfrak{x}$ mit den Normalenrichtungen φ, ψ, dann haben wir nach § 2 (24)

$$\mathfrak{g} = (\dot{x}_1 \cos\varphi + \dot{x}_2 \sin\varphi)\,\dot{\varphi}, \qquad \mathfrak{h} = (\dot{x}_1 \cos\psi + \dot{x}_2 \sin\psi)\,\dot{\psi}. \tag{87}$$

Wegen

$$(\dot{x}_1 \cos\varphi + \dot{x}_2 \sin\varphi)(\dot{x}_1 \cos\psi + \dot{x}_2 \sin\psi) = \dot{x}_1 \dot{x}_2 \sin(\psi - \varphi) \tag{88}$$

folgt daraus die gewünschte Formel

$$\boxed{\mathfrak{g}\mathfrak{h} = \mathfrak{x} \sin(\varphi - \psi) \cdot \dot{\varphi}\dot{\psi}}\,. \tag{89}$$

$\dot{\varphi}, \dot{\psi}$ kann man als *Dichten* von $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ *um den Schnittpunkt* $\mathfrak{x}$ bezeichnen.

Leiten wir uns nebenbei schließlich auch noch eine entsprechende Formel für ein *Elementenpaar* her, *das aus einem Punkt* $\mathfrak{x}$ *und einer Geraden* $\mathfrak{g}$ besteht. Wir setzen

$$x_1 = (p + a)\cos\varphi - b \sin\varphi, \qquad x_2 = (p + a)\sin\varphi + b\cos\varphi \tag{90}$$

und finden für

$$\mathfrak{x}\mathfrak{g} = \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{p}\dot{\varphi} \tag{91}$$

den Ausdruck

$$\mathfrak{x}\mathfrak{g} = \dot{a}\dot{b}\,\mathfrak{g}. \tag{92}$$

In ähnlicher Weise sind derartige Formeln von Lebesgue hergeleitet worden.[1])

§ 7. Formeln von Crofton für Eilinien.

Mittels der Formeln von § 6 ist es leicht, mehrere merkwürdige Ergebnisse Croftons herzuleiten.

Es sei $\mathfrak{K}$ ein Eigebiet, d. h. ein beschränktes konvexes von einer Eilinie umschlossenes Gebiet unserer Ebene. Wir betrachten Paare von Geraden $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$, von denen jede $\mathfrak{K}$ trifft, so daß die Durchschnitte

$$\mathfrak{g}\mathfrak{K} \neq 0, \quad \mathfrak{h}\mathfrak{K} \neq 0 \tag{93}$$

sind, und wollen die „Anzahl" solcher Paare berechnen, die sich in $\mathfrak{K}$ schneiden:

$$M_i = \int\limits_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{K} \neq 0} \mathfrak{g}\mathfrak{h}, \tag{94}$$

1) H. Lebesgue, Exposition d'un Mémoire de M. W. Crofton, Nouvelles Annales ... (4) 12 (1912), S. 481—502.

und solche, die sich außerhalb von $\mathfrak{K}$ schneiden:

(95)
$$M_a = \int\limits_{\mathfrak{g}\mathfrak{h}\mathfrak{K}=0} \mathfrak{g}\mathfrak{h}.$$

Man kann die folgende Integralformel leicht nachrechnen:

(96)
$$\int\limits_0^\omega\int\limits_0^\omega |\sin(\varphi-\psi)|\,\dot\varphi\,\dot\psi = 2(\omega-\sin\omega).$$

Zur Berechnung von M_i benutzen wir nun (89) und die letzte Integralformel (96) für $\omega=\pi$ und finden ($\mathfrak{g}\mathfrak{h}=\mathfrak{x}$)[1])

(97)
$$M_i = 2\pi\int\limits_{\mathfrak{x}<\mathfrak{K}} \mathfrak{x} = 2\pi F,$$

wenn F den Flächeninhalt von $\mathfrak{K}$ bedeutet. Durch die entsprechende Rechnung ergibt sich für M_a der Ausdruck

(98)
$$M_a = 2\int\limits_{\mathfrak{x}\not<\mathfrak{K}} (\omega-\sin\omega)\,\mathfrak{x}.$$

Dabei bedeutet $\mathfrak{x}<\mathfrak{K}$, daß $\mathfrak{x}$ zu $\mathfrak{K}$ gehört und $\mathfrak{x}\not<\mathfrak{K}$ das Gegenteil. Ferner ω den Winkel, unter dem man $\mathfrak{K}$ aus dem Punkte $\mathfrak{x}$ sieht, mit $0\leqq\omega\leqq\pi$. Da der Integrand in M_a positiv ist, genügt es zum *Existenzbeweis dieses uneigentlichen Integrals* zu zeigen, daß es *beschränkt* ist. Dazu genügt zu bemerken

(99)
$$M_i + M_a = \int\limits_{\mathfrak{g}\mathfrak{K}\neq 0,\,\mathfrak{h}\mathfrak{K}\neq 0} \mathfrak{g}\mathfrak{h} = \int\limits_{\mathfrak{g}\mathfrak{K}\neq 0}\mathfrak{g}\cdot\int\limits_{\mathfrak{h}\mathfrak{K}\neq 0}\mathfrak{h} = U^2$$

nach (60), wenn U der Umfang von $\mathfrak{K}$ ist. Hieraus folgt die behauptete Beschränktheit $M_a < U^2$.

Wegen (98) sagt CROFTON: $(\omega-\sin\omega)$ ist die „*Dichte*" der Schnittpunkte der Treffgeradenpaare von $\mathfrak{K}$. Setzt man (97), (98) in (99) ein, so ergibt sich folgendes seltsame Ergebnis CROFTONS:

(100)
$$\boxed{\pi F + \int\limits_{\mathfrak{x}\not<\mathfrak{K}} (\omega-\sin\omega)\,\mathfrak{x} = \tfrac{1}{2}U^2}.$$

CROFTON ist übrigens zu seiner Formel für die Dichte $(\omega-\sin\omega)$ auf anderem Wege gekommen, nämlich durch Anwendung des Seilliniensatzes von § 5 auf $\mathfrak{K}$ und einen kleinen Kreis an der Stelle $\mathfrak{x}$.

---

1) d. h. es soll $\mathfrak{x}$ der Schnittpunkt von $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ sein. Für die zugehörigen Dichten gilt die Formel nicht.

§ 8. Integrale der Sehnenpotenzen bei Eilinien.

Es sei s die Länge der „*Sehne*“, d. h. der Strecke, die die Gerade $\mathfrak{g}$ mit dem Eibereich $\mathfrak{K}$ gemein hat ($s \geqq 0$). Dann werden wir die folgenden zum Eibereich $\mathfrak{K}$ gehörigen Integrale betrachten.

$$S_k = \int s^k \mathfrak{g} \tag{101}$$

mit etwa ganzzahligem k. Sei andrerseits $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}'$ ein Paar von Punkten in $\mathfrak{K}$ und t sein Abstand ($t \geqq 0$). Dann bilden wir die Integrale

$$T_k = \int t^k \mathfrak{x}\mathfrak{x}'. \tag{102}$$

Zwischen diesen Integralen S_k und T_k läßt sich mittels eines Ergebnisses von § 6 ein Zusammenhang herstellen. Nach (86) haben wir nämlich

$$T_k = \int t^{k+1} \dot{r}\dot{r}' \mathfrak{g} \tag{103}$$

mit

$$t = |r - r'|. \tag{104}$$

Halten wir bei der Integration erst $\mathfrak{g}$ fest und beachten wir für $k+1 \geqq 0$

$$\int_0^s \int_0^s |r - r'|^{k+1} \dot{r}\dot{r}' = \frac{2}{(k+2)(k+3)} s^{k+3}, \tag{105}$$

so finden wir den behaupteten Zusammenhang

$$\boxed{T_k = \frac{2}{(k+2)(k+3)} S_{k+3}}. \tag{106}$$

Betrachten wir noch *die niedrigsten Fälle.* Für S_0 folgt aus dem Ergebnis von § 3 (60) über die Übereinstimmung des Geradeninhalts mit dem Umfang

$$S_0 = U. \tag{107}$$

Zur Berechnung von S_1 benutzen wir aus § 7 (97):

$$M_i = \int_{\mathfrak{g}\mathfrak{h} = \mathfrak{x} < \mathfrak{K}} \mathfrak{g}\mathfrak{h} = 2\pi F. \tag{108}$$

Halten wir bei der Integration zuerst $\mathfrak{g}$ fest, so folgt nach § 3 (58)

$$\int_{\mathfrak{g}\mathfrak{h} = \mathfrak{x} < \mathfrak{K}} \mathfrak{h} = 2s \tag{109}$$

die doppelte Sehnenlänge von $\mathfrak{g}\mathfrak{K}$. Somit ist

$$\boxed{S_1 = \int s \mathfrak{g} = \pi F}. \tag{110}$$

Diese Formel (110), die mit dem hier vorgetragenen Beweis ihre Gültigkeit auch für nicht konvexe Bereiche behält, soll später in § 9 noch einmal hergeleitet werden.

Nach (106) ist, wenn man darin für $k = -1$ setzt,

$$S_2 = \int \frac{\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'}{t}. \tag{111}$$

Darin liegt die Existenz des uneigentlichen Integrals T_{-1}, das man als *Newtons Selbstpotential* von $\mathfrak{K}$ bezeichnet. Für $k = 0$ ergibt sich aus (106)

$$S_3 = 3F^2 \tag{112}$$

und für $k = 1$

$$S_4 = 6\int t\,\mathfrak{x}\,\mathfrak{x}'. \tag{113}$$

Z. B. für den Fall des Einheitskreises findet sich

$$S_k = \frac{2\cdot 4 \cdots k}{3\cdot 5\cdots(k+1)}\cdot 2^{k+1}\,\pi \tag{114$_1$}$$

für gerades k und sonst

$$S_k = \frac{1\cdot 3\cdots k}{2\cdot 4\cdots(k+1)}\cdot 2^k\cdot \pi^2. \tag{114$_2$}$$

§ 9. Die kinematische Dichte.

Während das Bisherige eine Art Bericht über Ideen war, die in der Hauptsache von Crofton stammen, wollen wir jetzt zu einem neuen Gegenstand übergehen, dessen Grundbegriff, die kinematische Dichte, von H. Poincaré[1]) eingeführt wurde und dessen Verwertung man insbesondere meinem catalanischen Mitarbeiter L. A. Santaló[2]) verdankt.

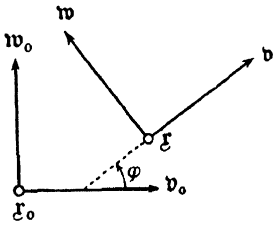


Fig. 7.

Wir nehmen als Element ein Achsenkreuz $\mathfrak{X}\,(\mathfrak{x};\mathfrak{v},\mathfrak{w})$, bestehend aus seinem Ursprung $\mathfrak{x}$ und zwei orthogonalen Einheitsvektoren $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{w}$ mit $v_1 w_2 - w_2 v_1 = +1$. Wir setzen (Fig. 7)

$$\begin{aligned} v_1 &= +\cos\varphi, \quad v_2 = +\sin\varphi; \\ w_1 &= -\sin\varphi, \quad w_2 = +\cos\varphi \end{aligned} \tag{115}$$

und betrachten nach Poincaré das alternierende Produkt

$$\boxed{\mathfrak{X} = \dot{x}_1\,\dot{x}_2\,\dot{\varphi} = \mathfrak{x}\,\dot{\varphi}}. \tag{116}$$

---

1) H. Poincaré, Calcul des Probabilités, Paris bei Gauthier-Villars 1896, Chap. 7, 8.

2) L. A. Santaló, Geometria Integral 4, Sobre la medida cinemática en el plano, Abhandlungen des Math. Seminars Hamburg **11** (1935) S. 222—236.

Wir behaupten:

$\mathfrak{X}$ ist die (im wesentlichen eindeutig bestimmte) gegenüber Euklidischen Bewegungen invariante Dichte für Achsenkreuze.

Tatsächlich sind die beiden Faktoren $\mathfrak{x}$ und $\dot{\varphi}$ einzeln gegenüber Bewegungen invariant, und die Einzigkeit folgt wie in § 2 aus der Tatsache, daß die Bewegungen die (gleichsinnigen) Achsenkreuze transitiv vertauschen.

Die bewiesene Invarianz von $\mathfrak{X}$ läßt sich so ausdrücken:

I. Bewegungsinvarianz. *Die kinematische Dichte ändert sich nicht, wenn man in der festen Ebene an Stelle des Achsenkreuzes $\mathfrak{X}_0$ ein neues $\mathfrak{X}_0^*$ einführt.*

Dazu tritt folgende zweite Invarianzeigenschaft:

II. Wahlinvarianz. *Die kinematische Dichte ändert sich nicht, wenn man in der bewegten Ebene an Stelle von $\mathfrak{X}$ ein neues Achsenkreuz $\mathfrak{X}^*$ einführt.*

Dabei wird also $\mathfrak{X}^*$ als mit $\mathfrak{X}$ starr verbunden vorausgesetzt: Der neue Ursprung $\mathfrak{x}^*$ hat also in bezug auf $\mathfrak{X}_0$ die Koordinaten

$$\begin{aligned} x_1^* &= x_1 + a_1 \cos\varphi - a_2 \sin\varphi, \\ x_2^* &= x_2 + a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi \end{aligned} \tag{117}$$

mit *festen* a_i, und dazu kommt

$$\varphi^* = \varphi + \text{konst.} \tag{118}$$

Wir finden daraus

$$\begin{aligned} \dot{x}_i^* &\equiv \dot{x}_i \ (\mathrm{mod}\ \dot{\varphi})^{1)}, \\ \dot{\varphi}^* &= \dot{\varphi}, \end{aligned} \tag{119}$$

und darin liegt die behauptete Wahlinvarianz

$$\dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{\varphi} = \dot{x}_1^* \dot{x}_2^* \dot{\varphi}^*. \tag{120}$$

Schließlich kommt noch hinzu die

III. Umkehrinvarianz. *Die kinematische Dichte ist (abgesehen vom Vorzeichen) invariant gegen die „Umkehr" der Bewegung.*

Darunter ist folgendes zu verstehen. Für einen mit dem „bewegten" Achsenkreuz $\mathfrak{X}$ starr verbundenen Beobachter beschreibt das „feste" $\mathfrak{X}_0$ die *„umgekehrte Bewegung"*. Von $\mathfrak{X}$ aus gesehen, hat der Ursprung $\mathfrak{x}_0$ von $\mathfrak{X}_0$ die Koordinaten

$$\begin{aligned} y_1 &= -x_1 \cos\varphi - x_2 \sin\varphi, \\ y_2 &= +x_1 \sin\varphi - x_2 \cos\varphi, \end{aligned} \tag{121}$$

und dazu kommt für den neuen Drehwinkel

$$\psi = -\varphi. \tag{122}$$

---

1) Diese Schreibweise bedeutet das Bestehen einer Gleichung $\dot{x}_i^* = \dot{x}_i + a\dot{\varphi}$.

Hieraus berechnen wir tatsächlich

$$(123)\qquad \mathfrak{Y} = \dot{y}_1 \dot{y}_2 \dot{\psi} = - \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{\varphi} = - \mathfrak{X},$$

wie behauptet.

Geben wir für die kinematische Dichte neben (116) noch einen anderen Ausdruck. Ziehen wir durch $\mathfrak{x}$ die Gerade $\mathfrak{g}$ in der Richtung $\mathfrak{w}$, so daß ihre Dichte nach (24)

$$(124)\qquad \mathfrak{g} = (\dot{x}_1 \cos\varphi + \dot{x}_2 \sin\varphi)\, \dot{\varphi}$$

wird. Wir haben nach (116)

$$(125)\qquad \mathfrak{X} = \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{\varphi} = (\dot{x}_1 \cos\varphi + \dot{x}_2 \sin\varphi)\,(- \dot{x}_1 \sin\varphi + \dot{x}_2 \cos\varphi)\, \varphi$$

und daraus wegen (124)

$$(126)\qquad \mathfrak{X} = - (- \dot{x}_1 \sin\varphi + \dot{x}_2 \cos\varphi)\, \mathfrak{g}\,.$$

Führen wir auf jeder Geraden $\mathfrak{g}(u, v)$ einen beliebigen Anfangspunkt $\mathfrak{p}(u, v)$ ein, so gilt

$$(127)\qquad \begin{aligned} x_1 &= p_1 - t \sin\varphi, \\ x_2 &= p_2 + t \cos\varphi \end{aligned}$$

und

$$(128)\qquad - \dot{x}_1 \sin\varphi + \dot{x}_2 \cos\varphi = (- \dot{p}_1 \sin\varphi + \dot{p}_2 \cos\varphi) + \dot{t}\,.$$

Da der erste Term rechts eine Linearkombination von $\dot{u}, \dot{v}$ ist, ergibt sich durch Multiplikation mit $\mathfrak{g}$ aus (126)

$$(129)\qquad \boxed{\mathfrak{X} = - \mathfrak{g}\dot{t}}\,.$$

Während in (116) als Ausgang ein Punkt $\mathfrak{x}$ der bewegten Ebene genommen war, haben wir jetzt in (29) unseren Ausgang von einer Geraden $\mathfrak{g}$ der bewegten Ebene genommen. Als zweiter Faktor trat in (116) die Dichte φ der Drehungen um $\mathfrak{x}$ auf, während in (129) die Dichte $\dot{t}$ der Schiebungen längs $\mathfrak{g}$ eingeht.

Berechnet man die „Anzahl" aller Achsenkreuze, deren Ursprung in einem Bereich $\mathfrak{K}$ liegt, das eine Mal mittels (116), das andere Mal mittels (129), so erhält man neuerdings die Formel (110). Dabei ist die Konvexität des Bereiches nicht erforderlich. s bedeutet die Gesamtlänge des Durchschnittes $\mathfrak{g}\mathfrak{K}$.

Unsere kinematische Dichte tritt immer dann auf, wenn wir als Element eine Figur einführen, die keine Bewegungsinvariante enthält und keine stetige Gruppe von Bewegungen in sich zuläßt. Z. B. können wir an Stelle eines Achsenkreuzes ein (gerichtetes) Linienelement verwenden, d. h. den Inbegriff eines Punktes $\mathfrak{x}$ und einer mit ihm vereinten (gerichteten) Geraden $\mathfrak{g}$.

§ 10. Eine Formel Poincarés.

Wir wollen für die kinematische Dichte $\mathfrak{X}$ noch eine allgemeinere Formel herleiten. Es sei $\mathfrak{K}_0$ eine Kurve in der Ebene des festen Achsenkreuzes $\mathfrak{X}_0$, $\mathfrak{K}$ eine Kurve in der bewegten Ebene von $\mathfrak{X}$, ferner $\mathfrak{y}$ ein Schnittpunkt von $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{K}$ und ψ der Schnittwinkel von $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}$ in $\mathfrak{y}$, s_0 und s die Bogenlängen auf $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}$ gezählt von beliebigen Anfangspunkten auf diesen Kurven bis zum Schnittpunkt $\mathfrak{y}$ (Fig. 8). Dann, behaupten wir, gilt

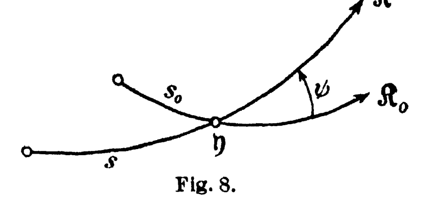


Fig. 8.

$$(130) \qquad \boxed{\mathfrak{X} = -\dot{s}_0 \dot{s} \dot{\psi} \sin\psi}\,.$$

Es seien $y_1(s_0), y_2(s_0)$ die Koordinaten von $\mathfrak{y}$ bezüglich $\mathfrak{X}_0$ und $y_1'(s), y_2'(s)$ die Koordinaten[1]) von $\mathfrak{y}$ bezüglich $\mathfrak{X}$. Die Koordinaten x_i des Ursprungs $\mathfrak{x}$ von $\mathfrak{X}$ bezüglich $\mathfrak{X}_0$ sind dann

$$(131) \qquad \begin{aligned} x_1 &= y_1 - y_1' \cos\varphi + y_2' \sin\varphi, \\ x_2 &= y_2 - y_1' \sin\varphi - y_2' \cos\varphi. \end{aligned}$$

Ferner haben wir für die Richtungen

$$(132) \qquad \begin{aligned} &\dot{y}_1 = \dot{s}_0 \cos\tau_0, \quad \dot{y}_2 = \dot{s}_0 \sin\tau_0; \\ &\dot{y}_1' = \dot{s} \cos\tau \;, \quad \dot{y}_2' = \dot{s} \sin\tau \;; \\ &\psi = \tau - \tau_0 + \varphi. \end{aligned}$$

Zur Berechnung der kinematischen Dichte $\mathfrak{X} = \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{\varphi}$ finden wir

$$(133) \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &\equiv \dot{y}_1 - \dot{y}_1' \cos\varphi + \dot{y}_2' \sin\varphi, \\ \dot{x}_2 &\equiv \dot{y}_2 - \dot{y}_1' \sin\varphi - \dot{y}_2' \cos\varphi \end{aligned} \quad (\mathrm{mod}\ \dot{\varphi})$$

oder mittels (132)

$$(134) \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &\equiv \dot{s}_0 \cos\tau_0 - \dot{s} \cos(\tau + \varphi), \\ \dot{x}_2 &\equiv \dot{s}_0 \sin\tau_0 - \dot{s} \sin(\tau + \varphi). \end{aligned} \quad (\mathrm{mod}\ \dot{\varphi})$$

Daraus ist

$$(135) \qquad \mathfrak{X} = \dot{x}_1 \dot{x}_2 \dot{\varphi} = -\dot{s}_0 \dot{s} \dot{\varphi} \sin\psi,$$

Andererseits ist

$$(136) \qquad \dot{s}_0 \dot{s} \dot{\varphi} = \dot{s}_0 \dot{s} (\dot{\tau} - \dot{\tau}_0 + \dot{\varphi}) = \dot{s}_0 \dot{s} \dot{\varphi},$$

da

$$(137) \qquad \dot{s}_0 \dot{\tau}_0 = \dot{s} \dot{\tau} = 0$$

ist wegen $\tau_0 = \tau_0(s_0)$, $\tau = \tau(s)$. In (135), (136) ist aber unsere Behauptung (130) enthalten.

1) Die Striche bedeuten hier keine Ableitungen!

Nennen wir einen Schnittpunkt von $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}$ *positiv*, wenn $\mathfrak{K}$ ins linke Ufer von $\mathfrak{K}_0$ eintritt, so daß wir $0 < \psi < \pi$ nehmen können. Dann halten wir zunächst s_0, s fest und integrieren nach ψ zwischen 0 und π:

$$\int \mathfrak{X} = \int \dot{s}_0 \, \dot{s} \, d \cos \psi = 2 \int \dot{s} \, \dot{s}_0 . \tag{138}$$

Lassen wir nun unsere Kurve $\mathfrak{K}$ um jeden Punkt von $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}$ durch den Winkel π drehen, so bekommen wir durch Integration, wenn wir $\mathfrak{X}$, L_0 und L positiv in Rechnung stellen,

$$\int n_+ \mathfrak{X} = 2 L_0 L . \tag{139}$$

Dabei ist n_+ die Anzahl der positiven Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{K}$. Genau so findet sich (wenn man den Sinn von $\mathfrak{K}$ umkehrt) für die Anzahl n_- der negativen Schnittpunkte

$$\int n_- \mathfrak{X} = 2 L_0 L \tag{140}$$

und durch Addition für die Gesamtzahl

$$n = n_+ + n_- \tag{141}$$

aller Schnittpunkte die *Formel von Poincaré*

$$\boxed{\int n \, \mathfrak{X} = 4 L_0 L} . \tag{142}$$

Die Integration ist dabei über alle Lagen von $\mathfrak{K}$ zu erstrecken, die kinematische Dichte $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{K}$ ist > 0 zu nehmen und L_0, L sind die Längen von $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}$.

Ein Unterschied gegen die Überlegungen von § 3 ist hier der. Dreht man den Sinn einer Kurve $\mathfrak{K}$ um, so ist im allgemeinen die umgerichtete Kurve nicht mehr zu $\mathfrak{K}$ kongruent, wenn nämlich $\mathfrak{K}$ nicht bezüglich eines seiner Punkte symmetrisch ist. Deshalb der eine Faktor zwei auf der rechten Seite von (142).

Bemerkung. Es liegt der Gedanke nahe, den Beweis von POINCARÉs Formel (142) auf folgendem Wege zu führen. 1. Man beweist (142) zunächst unter der Voraussetzung, daß $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}$ *Strecken* sind. 2. Dann läßt sich die Gültigkeit von (142) leicht auf den Fall ausdehnen, daß $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}$ geradlinige *Vielecke* sind. 3. Um den Nachweis von (142) dann allgemein zu erbringen, hat man dann beliebige Kurven $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}$ durch Vielecke $\mathfrak{K}_0'$, $\mathfrak{K}'$ *anzunähern*. Dabei stellt sich aber die folgende Schwierigkeit ein: Auch wenn $\mathfrak{K}_0'$ und $\mathfrak{K}'$ nahe an $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}$ liegen, braucht die Schnittpunktzahl n' von $\mathfrak{K}_0'$, $\mathfrak{K}'$ nicht nahe der Schnittpunktzahl n von $\mathfrak{K}_0$, $\mathfrak{K}$ zu sein. Entsprechendes gilt auch schon für die Herleitung der Formel § 3 (58) von CROFTON.

§ 11. Isoperimetrie des Kreises nach Santaló.

Wir wollen nach SANTALÓ von der Formel (142) POINCARÉs eine Anwendung machen zum Beweis der sogenannten „isoperimetrischen Eigenschaft“ des Kreises, unter „allen“ ebenen Kurven gegebenen Umfangs größten Flächeninhalt zu umgrenzen. Dabei wollen wir uns den Weg dadurch erleichtern, daß wir zum Wettbewerb nur Eilinien zulassen.

Zur Anwendung von (142) nehmen wir für $\mathfrak{K}_0$ eine Eilinie und für $\mathfrak{K}$ einen Kreis vom Halbmesser r und dem Mittelpunkt $\mathfrak{x}$. Die kinematische Dichte von $\mathfrak{K}$ ist gleich dem Flächenelement $\dot{\mathfrak{x}}$ mal dem Drehwinkel $\dot{\varphi}$ um $\mathfrak{x}$, also

$$\mathfrak{X} = \dot{\mathfrak{x}} \dot{\varphi}, \tag{143}$$

und da alle solchen Kreise mit demselben Mittelpunkt zusammenfallen, können wir eine Integration vorwegnehmen und entsprechend für

$$\int \mathfrak{X} = 2\pi \dot{\mathfrak{x}} \tag{144}$$

setzen. Somit ergibt sich in unserem Fall aus (142)

$$\int n \dot{\mathfrak{x}} = 4 r U, \tag{145}$$

wenn U der Umfang von $\mathfrak{K}_0$ ist. Natürlich könnte man diese Formel auch leicht unmittelbar herleiten ohne Berufung auf die allgemeinere (142), so wie wir das später in § 15 in einem ähnlichen Fall tun werden.

Bezeichnen wir den Flächeninhalt des Gebiets der Mittelpunkte aller Kreise vom Halbmesser r, die mit der Eilinie $\mathfrak{K}_0$ genau i Punkte gemein haben, mit F_i $(F_i \geqq 0)$, so ist

$$\int n \dot{\mathfrak{x}} = 2F_2 + 4F_4 + 6F_6 + \cdots. \tag{146}$$

Der Flächeninhalt des Gebiets der Mittelpunkte aller Kreislinien $\mathfrak{K}$ vom Halbmesser r, die die Eilinie $\mathfrak{K}_0$ überhaupt treffen, soll G heißen. Dann ist

$$G = F_2 + F_4 + F_6 + \cdots. \tag{147}$$

Somit folgt aus (145), (146), (147)

$$2rU - G = F_4 + 2F_6 + 3F_8 + \cdots. \tag{148}$$

Es sei r_i der *Inkreishalbmesser* von $\mathfrak{K}_0$, d. h. der Halbmesser des größten in $\mathfrak{K}_0$ enthaltenen Kreises, und r_u sein *Umkreishalbmesser*, d. h. der Halbmesser des kleinsten $\mathfrak{K}_0$ enthaltenden Kreises. Liegt dann r zwischen r_i und r_u,

$$r_i \leqq r \leqq r_u, \tag{149}$$

so hat das Mittelpunktgebiet der $\mathfrak{K}_0$ treffenden Kreise $\mathfrak{K}$ vom Halbmesser r kein Loch, d. h. ist einfach zusammenhängend und wird von der äußeren Parallelkurve $\mathfrak{K}_r$ im Abstand r von $\mathfrak{K}_0$ umschlossen. Für deren Flächeninhalt, das ist genau unser G, gilt bekanntlich (nach J. STEINER), und wie man leicht bestätigt (vgl. § 13)

$$G = F + rU + r^2\pi, \tag{150}$$

wenn F, U Fläche und Umfang von $\mathfrak{K}_0$ sind. Danach haben wir

$$2rU - G = rU - F - \pi r^2 = \left(\frac{U^2}{4\pi} - F\right) - \pi\left(\frac{U}{2\pi} - r\right)^2. \tag{151}$$

Durch Vergleich mit (148) folgt die *Gleichung von* SANTALÓ

$$\boxed{\left(\frac{U^2}{4\pi} - F\right) - \pi\left(\frac{U}{2\pi} - r\right)^2 = F_4 + 2F_6 + 3F_8 + \cdots}. \tag{152}$$

Beachten wir: Wenn von zwei Eilinien die eine die andere enthält, so hat die äußere den größeren Umfang. Das folgt z. B. sofort aus der Deutung des Umfangs als Geradeninhalt (§ 3). Deshalb ist, da der Inkreis in $\mathfrak{K}$ liegt und der Umkreis $\mathfrak{K}$ enthält,

$$\frac{U}{2\pi} - r_i \geqq 0, \quad \frac{U}{2\pi} - r_u \leqq 0, \tag{153}$$

und somit gibt es genau ein r, das der Vorschrift (149) genügt und für das

$$\frac{U}{2\pi} - r = 0 \tag{154}$$

ist. Das gibt folgenden Sonderfall von (152):

$$\frac{U^2}{4\pi} - F = F_4 + 2F_6 + 3F_8 + \cdots. \tag{155}$$

Darin bedeutet F_i den Flächeninhalt des Gebiets der Mittelpunkte aller Kreise, die zu $\mathfrak{K}_0$ umfangsgleich sind und mit $\mathfrak{K}_0$ genau i Punkte gemein haben.

Aus (152) oder (155) folgt die „klassische" Ungleichheit

$$\boxed{\frac{U^2}{4\pi} - F \geqq 0}, \tag{156}$$

die die isoperimetrische Eigenschaft des Kreises aussagt. Aber natürlich gibt die Gleichung (152) mehr. Z. B. läßt sich aus (152) sofort eine Formel von T. BONNESEN (1921) gewinnen, die (156) verschärft. Es folgt nämlich für $r = r_i$, r_u aus (152)

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{4\pi} - F &\geqq \pi\left(\frac{U}{2\pi} - r_i\right)^2, \\ \frac{U^2}{4\pi} - F &\geqq \pi\left(r_u - \frac{U}{2\pi}\right)^2. \end{aligned} \tag{157}$$

Wegen der Beziehung

(158) $$\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) \geqq \left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2$$

folgt aus (153), (157)

(159) $$\boxed{\frac{L^2}{4\pi} - F \geqq \frac{\pi}{4}(r_u - r_i)^2}.$$

Dies ist BONNESENS Verschärfung der klassischen Formel (156).[1])

Aus (159) folgt sofort die Lösung der „*Einzigkeitsfrage*", nämlich der Frage, wann in (156) das Gleichheitszeichen gilt. Nach (159) muß dann $r_i = r_u$, d. h. Umkreis und Inkreis müssen zusammenfallen, was nur dann eintritt, wenn $\mathfrak{K}_0$ selbst ein Kreis ist.

Das Hübsche an den Formeln (152), 155) ist, daß man es dabei nicht mit *Ungleichheiten*, sondern mit *Gleichungen* zu tun hat, bei denen alle vorkommenden Glieder eine einfache geometrische Bedeutung besitzen. Die hier benutzte Formel von STEINER für den Flächeninhalt von Parallellinien werden wir später § 13 neu herleiten.

Einen zweiten, ebenfalls aus POINCARÉS Formel (142) entspringenden und ebenfalls von SANTALÓ stammenden Beweis für die Extremeigenschaft des Kreises werden wir später in § 13 kennenlernen, einen dritten in § 15.

§ 12. Anzahl der Strecken gegebener Länge, die einen Eibereich treffen.

Es sei $\mathfrak{K}_0$ ein Eibereich und $\mathfrak{S}$ eine gerichtete Strecke von der Länge l auf der gerichteten Geraden $\mathfrak{g}$. Wir wollen die durch

(160) $$A = \int_{\mathfrak{K}_0 \mathfrak{S} \neq 0} \dot{\mathfrak{S}}$$

(wobei $\dot{\mathfrak{S}}$ die kinematische Dichte von $\mathfrak{S}$ bedeutet) gemessene „Anzahl" aller Strecken der Länge l berechnen, die $\mathfrak{K}_0$ treffen. Wir verwenden für $\dot{\mathfrak{S}}$ die Formel (129), nämlich

(161) $$|\dot{\mathfrak{S}}| = |\dot{\mathfrak{g}}\dot{t}|$$

und finden, wenn wir bei der Integration zunächst $\mathfrak{g}$ festhalten,

(162) $$\int_{\mathfrak{K}_0 \mathfrak{S} \neq 0} \dot{\mathfrak{S}} = \int_{K_0 \mathfrak{g} \neq 0} (s + 2l)\, \dot{\mathfrak{g}}.$$

1) Vgl. darüber das Buch von T. BONNESEN „Les Problèmes des Isopérimètres ...". Paris bei Gauthier-Villars 1929, S. 63 und T. BONNESEN und W. FENCHEL, Theorie der konvexen Körper, Ergebnisse der Math. ... 3, Berlin bei Springer 1934. Einen Nachruf auf den kürzlich verstorbenen dänischen Geometer und Schauspieler T. BONNESEN (27. 3. 1873—14. 3. 1935) von J. MOLLERUP findet man in der Matematisk Tidskrift B (1935), S. 16—24. Eine schwächere Ungleichheit als (159) hat F. BERNSTEIN, Mathem. Annalen 60 (1905) angegeben. Auf diese Schrift BERNSTEINS kommen wir später zurück.

Dabei bedeutet s die Länge der „Sehne" $\mathfrak{K}_0 \mathfrak{g}$. Unter Verwendung von (110), (60) ergibt sich daraus

(163) $$\int_{\mathfrak{K}_0 \mathfrak{S} \neq 0} \dot{\mathfrak{S}} = 2(\pi F + l U),$$

wenn F und U Fläche und Umfang von K_0 bedeuten. Für nicht gerichtete Strecken ergibt sich daraus

(164) $$\boxed{\int_{\mathfrak{K}_0 \mathfrak{S} \neq 0} \dot{\mathfrak{S}} = \pi F + l U}.$$

Gehen wir zur Berechnung von A von der Formel (116) für die kinematische Dichte aus, die wir jetzt so schreiben:

(165) $$\dot{\mathfrak{S}} = \dot{\mathfrak{x}} \dot{\varphi},$$

wenn $\mathfrak{x}$ den Anfangspunkt von $\mathfrak{S}$ und φ die Richtung von $\mathfrak{S}$ bedeutet. Halten wir $\mathfrak{x}$ fest, so ist

(166) $$\int \dot{\varphi} = 2\pi$$

für $\mathfrak{x} < \mathfrak{K}$, und wir nennen

(167) $$\int \dot{\varphi} = \omega$$

für $\mathfrak{x} \not< \mathfrak{K}$. Dann ergibt sich

(168) $$\int_{\mathfrak{K}_0 \mathfrak{S} \neq 0} \dot{\vec{\mathfrak{S}}} = 2\pi F + \int_{\mathfrak{x} \not< \mathfrak{K}_0} \omega \dot{\mathfrak{x}}.$$

Darin heben wir durch den Pfeil hervor, daß es sich um gerichtete Strecken handelt. Durch Vergleich mit (163) findet sich folgendes Ergebnis von SANTALÓ:

(169) $$\boxed{2 l U = \int_{\mathfrak{x} \not< \mathfrak{K}_0} \omega \dot{\mathfrak{x}}}.$$

§ 13. Anzahl der Eibereiche vorgeschriebener Gestalt, die einen festen treffen.

Wir wollen jetzt die Betrachtung von § 12 dahin verallgemeinern, daß wir an Stelle der Strecke $\mathfrak{S}$ einen Eibereich $\mathfrak{K}$ treten lassen und die Lagen von $\mathfrak{K}$ abzählen, die den festen Eibereich $\mathfrak{K}_0$ treffen:

(170) $$A = \int_{\mathfrak{K}_0 \mathfrak{K} \neq 0} \dot{\mathfrak{K}}.$$

Wir beziehen $\mathfrak{K}_0$ auf einen „Aufpunkt", der etwa im Innern von $\mathfrak{K}_0$ liegen soll, und finden zu ihm die Stützfunktion $p_0(\varphi)$. Ebenso beziehen wir $\mathfrak{K}$ auf einen im Innern von $\mathfrak{K}$ gelegenen Aufpunkt $\mathfrak{x}$ und bezeichnen die

Stützfunktion von $\mathfrak{K}$ bezüglich $\mathfrak{x}$ mit $p(\varphi)$. Nennen wir ϑ den Drehwinkel von $\mathfrak{K}$ um $\mathfrak{x}$, so haben wir für die kinematische Dichte von $\mathfrak{K}$

(171) $$\dot{\mathfrak{K}} = \dot{\mathfrak{x}}\dot{\vartheta}.$$

Halten wir zunächst ϑ fest, so sehen wir: Der Aufpunkt $\mathfrak{x}$ durchläuft, wenn $\mathfrak{K}$ parallel verschoben wird, so daß es immer $\mathfrak{K}_0$ trifft, einen Eibereich mit der Stützfunktion

(172) $$P(\varphi, \vartheta) = p_0(\varphi) + p(\varphi + \pi + \vartheta).$$

Daß (172) bei festem ϑ wieder Stützfunktion einer Eilinie ist, sieht man etwa daraus, daß als Bedingung für Stützfunktionen (neben der Periodizität) sich

(173) $$R = P + \frac{\partial^2 P}{\partial \varphi^2} \geqq 0$$

ergibt, d. h. positiver Krümmungshalbmesser.[1]) Nun folgt aber aus (172)

(174) $$R = r_0 + r; \; r_0 \geqq 0, \; r \geqq 0, \; R \geqq 0.$$

Die hier verwendete Linearkombination von Eilinien wird später (§ 15) näher erläutert.

---

1) Ist

(a) $$+ x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi = p(\varphi)$$

die Gleichung der Stützgeraden einer Eilinie, so ergibt sich ihr Berührungspunkt aus dieser und der daraus durch Teilableitung nach φ entstehenden Gleichung

(b) $$- x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi = p'(\varphi),$$

nämlich

(c) $$x_1 = p\cos\varphi - p'\sin\varphi,$$
$$x_2 = p\sin\varphi + p'\cos\varphi.$$

Daraus erhält man durch Ableitung für das „vektorielle Linienelement“

(d) $$\dot{x}_1 = -(p + p'')\sin\varphi \cdot \dot{\varphi},$$
$$\dot{x}_2 = +(p + p'')\cos\varphi \cdot \dot{\varphi}.$$

Für das Linienelement ergibt sich demnach als Projektion des vektoriellen Linienelements auf die Tangente $\dot{s} = - \dot{x}_1 \sin\varphi + \dot{x}_2 \cos\varphi$, also der Ausdruck

(e) $$\dot{s} = (p + p'')\dot{\varphi}.$$

Daraus ist der *Krümmungshalbmesser* gleich

(f) $$r = \frac{\dot{s}}{\dot{\varphi}} = p + p''.$$

Für den Flächeninhalt F ergibt sich aus (c), (d) die später zu benutzende Formel

(g) $$F = \tfrac{1}{2}\int (x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1) = \tfrac{1}{2}\int p(p + p'')\dot{\varphi}$$

oder durch Integration nach Teilen

(h) $$\boxed{F = \tfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi} (p^2 - p'^2)\,\dot{\varphi}}.$$

Andererseits ergibt sich aus (e) durch Integration wieder die Formel (61) von Cauchy.

Für den Flächeninhalt F der Eilinie mit der Stützfunktion $p(\varphi)$ erhält man nach (h)

(175) $$F = \tfrac{1}{2}\int p(p+p'')\dot{\varphi} = \tfrac{1}{2}\int (p^2 - p'^2)\dot{\varphi}.$$

Somit ergibt sich

(176) $$A = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left\{P^2 - \left(\frac{\partial P}{\partial \varphi}\right)^2\right\}\dot{\varphi}\dot{\vartheta},$$

wobei

(177) $$P = p_0(\varphi) + p(\varphi + \vartheta)$$

gesetzt werden kann, indem wir statt $\pi + \vartheta$ wieder ϑ einführen. Danach ist

$$A = \tfrac{1}{2}\int\int\{(p_0^2 + 2p_0 p + p^2) - (p_0'^2 + 2p_0' p' + p'^2)\}\dot{\varphi}\dot{\vartheta}$$

(178) $$= 2\pi\left\{\tfrac{1}{2}\int(p_0^2 - p_0'^2)\dot{\varphi} + \tfrac{1}{2}\int(p(\varphi)^2 - p'(\varphi)^2)\dot{\varphi}\right\}$$
$$+ \int\int p_0 p \dot{\varphi}\dot{\vartheta} - \int\int p_0' p' \dot{\varphi}\dot{\vartheta}.$$

Dabei ist beim zweiten Glied rechts statt der Integrationsveränderlichen $\varphi + \vartheta$ wieder φ geschrieben. Führt man im letzten Integral zuerst die Integration nach ϑ aus, das nur in p' auftritt, so ergibt sich Null, da p die Periode 2π hat. Ferner ist nach CAUCHY (61)

(179) $$\int p\dot{\vartheta} = U, \quad \int p_0\dot{\varphi} = U_0,$$

und somit ergibt sich nach (175), (178), (179) die Formel von SANTALÓ

(180) $$\boxed{\int_{\mathfrak{K}\mathfrak{K}_0 \neq 0} \dot{\mathfrak{K}} = 2\pi(F_0 + F) + U_0 U}.$$

Sie umfaßt die frühere (163). Auch läßt sie eine Umformung nach Art von (169) zu.

Wir werden von (180) sofort zwei Anwendungen machen!

Es sei insbesondere $\mathfrak{K}$ ein Kreis vom Halbmesser r. Dann folgt aus (180) die Formel von J. STEINER für den Flächeninhalt F_r der äußeren Parallelkurve im Abstand r zu unserer Eilinie $\mathfrak{K}_0$

(150*) $$F_r = F_0 + rU_0 + \pi r^2,$$

wenn wir beachten, daß in unserem Falle $U = 2\pi r$ und $F = \pi r^2$ wird und die Beziehung besteht

$$\int_{\mathfrak{K}_0\mathfrak{K} \neq 0} \dot{\mathfrak{K}} = 2\pi F_r.$$

SANTALÓS Formel (180) ist also eine naturgemäße Verallgemeinerung der Formel (150*) von J. STEINER.[1]) Eine andere Verallgemeinerung werden wir im folgenden § 15 (199) kennenlernen.

Wir wenden die Formel (180) von SANTALÓ jetzt insbesondere auf den Fall an, daß die beiden Eibereiche $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}$ kongruent sind. Dann haben wir

(181) $$\int_{\mathfrak{K}_0 \mathfrak{K} \neq 0} \mathfrak{K} = 4\pi F + U^2.$$

Andererseits ist nach der Formel (142) von POINCARÉ

(182) $$\int n\,\mathfrak{K} = 4\,U^2 = 2\,J_2 + 4\,J_4 + 6\,J_6 + \cdots,$$

wenn $J_k \geqq 0$ die Anzahl aller Lagen von $\mathfrak{K}$ mißt, für die der Rand von $\mathfrak{K}$ mit dem von $\mathfrak{K}_0$ genau k Punkte gemein hat. Ebenso können wir (181) so schreiben:

(183) $$4\pi F + U^2 = J_2 + J_4 + J_6 + \cdots.$$

Dabei ist $J_0 = 0$, weil $\mathfrak{K}$ sicher nicht innerhalb von $\mathfrak{K}_0$ Platz hat. Teilt man (182) durch zwei und zieht davon (183) ab, so entsteht

(184) $$\boxed{U^2 - 4\pi F = J_4 + 2\,J_6 + 3\,J_8 + \cdots}.$$

Dies ist der zweite Beweis und die zweite Verschärfung von SANTALÓ für die klassische isoperimetrische Ungleichheit $U^2 - 4\pi F \geqq 0$. Wir wiederholen: In (184) bedeutet J_k die „Anzahl" der Lagen der zu $\mathfrak{K}_0$ kongruenten Eibereiche $\mathfrak{K}$, deren Ränder mit dem von $\mathfrak{K}_0$ genau k Punkte gemein haben. Der „Einzigkeitsbeweis" scheint hier weniger einfach als in § 11.

§ 14. Weitere Ergebnisse Santalós über starr bewegliche Linien.

Es sei $\mathfrak{K}_0$ ein fester Bereich, $\mathfrak{K}_1$ ein starr beweglicher, $\mathfrak{x}$ ein Punkt im Durchschnitt $\mathfrak{K}_0 \mathfrak{K}_1$. Konvexität ist dabei nicht erforderlich. Wir wollen die Anzahl der Möglichkeiten durch folgendes Integral auswerten (Fig. 9):

(185) $$A_1 = \int_{\mathfrak{x} < \mathfrak{K}_0 \mathfrak{K}_1} \mathfrak{x}\,\mathfrak{K}_1.$$

1) Vielleicht tritt die Formel (150) schon früher als bei STEINER auf. Bei J. STEINER, Über parallele Flächen, Monatsbericht der Akademie der Wissenschaften zu Berlin (1840) S. 114—118 = Werke 2 (1882) S. 171—176, ist die entsprechende Formel für die räumliche Geometrie hergeleitet, die in der Theorie der konvexen Körper eine wesentliche Rolle spielt und auf die wir später mehrfach zurückkommen werden (vgl. auch § 15).

Dabei bedeutet $\mathfrak{x}$ die Dichte des Punktes $\mathfrak{x}$ und $\mathfrak{K}_1$ die kinematische Dichte des beweglichen Bereichs $\mathfrak{K}_1$. Halten wir bei der Integration zuerst $\mathfrak{K}_1$ fest und bezeichnen wir den Flächeninhalt des Schnittbereichs $\mathfrak{K}_0 \mathfrak{K}_1$ mit F_{01}, so erhalten wir

Fig. 9.

$$A_1 = \int F_{01} \mathfrak{K}_1 . \tag{186}$$

Halten wir andererseits zunächst $\mathfrak{x}$ in $\mathfrak{K}_0$ fest und zählen wir die Lagen von $\mathfrak{K}_1$ ab, die $\mathfrak{x}$ enthalten. Wegen der Umkehrinvarianz der kinematischen Dichte (§ 9) stimmt diese Anzahl überein mit der Anzahl der Lagen eines gerichteten Linienelements in $\mathfrak{K}_1$, ist also gleich $2\pi F_1$. Somit entsteht

$$A_1 = \int 2\pi F_1 \mathfrak{x} = 2\pi F_0 F_1 . \tag{187}$$

Durch Vergleich von (186), (187) folgt

$$\boxed{\int F_{01} \mathfrak{K}_1 = 2\pi F_0 F_1} . \tag{188}$$

An zweiter Stelle nehmen wir neben dem festen Bereich $\mathfrak{K}_0$, der wieder nicht konvex zu sein braucht, eine (im allgemeinen offene) bewegliche Kurve $\mathfrak{K}$ mit der Länge L und eine bewegliche Gerade $\mathfrak{g}$. Wir berechnen folgendes Integral:

$$A_2 = \int n \mathfrak{K} \mathfrak{g} , \tag{189}$$

wobei n die Anzahl (im gewöhnlichen Sinn des Wortes) der Schnittpunkte von $\mathfrak{K}$ mit $\mathfrak{g}$ bedeutet, soweit sie in $\mathfrak{K}_0$ liegen. Halten wir zunächst $\mathfrak{K}$ fest und bezeichnen wir die Länge des Durchschnitts $\mathfrak{K}_0 \mathfrak{K}$ mit l (Fig. 10), so folgt nach CROFTONs Formel (58) von § 3

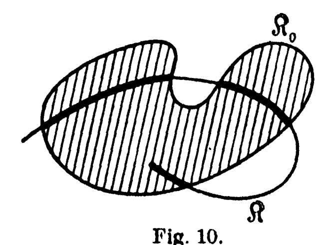


Fig. 10.

$$A_2 = 2 \int l \mathfrak{K} . \tag{190}$$

Jetzt halten wir bei der Berechnung des Integrals (189) zunächst $\mathfrak{g}$ fest. Sei s die Länge der Sehne $\mathfrak{K}_0 \mathfrak{g}$. Dann ist nach der Formel (142) von POINCARÉ in § 10

$$\int n \mathfrak{K} = 4 s L \tag{191}$$

und somit

$$A_2 = 4 L \int s \mathfrak{g} . \tag{192}$$

Nach (110) ist schließlich

$$A_2 = 4\pi L F_0 , \tag{193}$$

und durch Vergleich mit (190) erhalten wir die folgende Formel von SANTALÓ:

$$\boxed{\int l\,\mathfrak{K} = 2\pi F_0 L}. \tag{194}$$

Erinnern wir nochmals an die Bedeutung der darin auftretenden Zeichen: $\mathfrak{K}$ war die kinematische Dichte für die bewegliche Kurve, l die Gesamtlänge ihres Durchschnitts mit dem festen Bereich $\mathfrak{K}_0$ (ein Durchschnitt, der natürlich wie in Fig. 10 nicht zusammenhängen muß), F_0 der Flächeninhalt von $\mathfrak{K}_0$ und L die Länge von $\mathfrak{K}$.[1])

§ 15. Minkowskis Ungleichheit für den gemischten Flächeninhalt.

Sind $p_0(\varphi)$ und $p_1(\varphi)$ Stützfunktionen zweier Eilinien, so ist

$$p(\varphi) = c_0 p_0(\varphi) + c_1 p(\varphi) \tag{195}$$

für $c_0 \geqq 0$, $c_1 \geqq 0$, wie wir schon in § 13 bemerkt haben, wieder Stützfunktion einer Eilinie $\mathfrak{K}$, und wir schreiben

$$\mathfrak{K} = c_0 \mathfrak{K}_0 + c_1 \mathfrak{K}_1 . \tag{196}$$

Man kann dies am besten so einsehen: Ist $\mathfrak{x}_0$ irgendein Punkt von $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{x}_1$ irgendein Punkt von $\mathfrak{K}_1$, so durchläuft der Punkt $c_0\mathfrak{x}_0 + c_1\mathfrak{x}_1$[2]), wenn $\mathfrak{x}_0$ und $\mathfrak{x}_1$ unabhängig voneinander $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ beschreiben, das Gebiet $\mathfrak{K}$. Daß aber dieses Gebiet konvex ist, d. h. mit irgend zweien seiner Punkte $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{x}'$ auch deren Verbindungsstrecke enthält, sieht man aus der Formel

$$(1-t)\mathfrak{x} + t\mathfrak{x}' = c_0\{(1-t)\mathfrak{x}_0 + t\mathfrak{x}_1\} + c_1\{(1-t)\mathfrak{x}_0' + t\mathfrak{x}_1'\}, \quad 0 \leqq t \leqq 1. \tag{197}$$

Diese *positive Linearkombination konvexer Bereiche* ist von dem gedankenreichen Schweizer Geometer JAKOB STEINER (etwa 1840) und dem vielseitigen in München lebenden Bibliothekar, Geometer und Romanisten HERMANN BRUNN (etwa 1887) eingeführt und untersucht worden. HERMANN MINKOWSKI hat dann etwa 1900 den wesentlichen Begriff des „*gemischten Flächeninhalts*" eingeführt[3]), von dem hier gehandelt werden soll.

---

1) Weitere verwandte Ergebnisse SANTALÓs im folgenden § 17, Nr. 7. Vgl. ferner die dort folgenden Aufgaben 14—18 über Schwerpunkte.

2) Dies bedeutet für die Koordinaten x_{ik} der Punkte $\mathfrak{x}_i$ die Linearkombination $c_0 x_{0k} + c_1 x_{1k}$.

3) Wegen der Literaturangaben und Geschichte vgl. W. BLASCHKE, Kreis und Kugel, Leipzig 1916, und T. BONNESEN und W. FENCHEL, Theorie der konvexen Körper, Berlin 1934.

Dazu kommt man durch Berechnung des Flächeninhalts F von $\mathfrak{K}$ etwa mittels der Formel (h) aus § 13, nämlich

$$F = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}(p^2 - p'^2)\,\dot{\varphi}. \tag{198}$$

Das gibt nämlich wegen (195)

$$F = c_0^2 F_{00} + 2\,c_0\,c_1 F_{01} + c_1^2 F_{11}, \tag{199}$$

wobei

$$\boxed{F_{ik} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{+\pi}(p_i\,p_k - p_i'\,p_k')\,\dot{\varphi}} \tag{200}$$

gesetzt ist. Nach (200) ist insbesondere $F_{00} = F_0$, $F_{11} = F_1$. Wir haben es in diesem gemischten Flächeninhalt F_{ik} MINKOWSKIS mit einer Art *Polarenbildung* des gewöhnlichen Flächeninhalts (198) zu tun.

Nimmt man $c_0 = 1$, $c_1 = r$ und für $\mathfrak{K}_1$ den Einheitskreis um den Ursprung, so wird $\mathfrak{K}_0 + r\,\mathfrak{K}_1$ der äußere Parallelbereich im Abstand r von $\mathfrak{K}_0$. Durch Vergleich von (199) mit STEINERS Formel (150), (180) ergibt sich in diesem Fall

$$2F_{01} = U_0. \tag{201}$$

Dasselbe folgt wegen (61) auch aus (200), wenn man darin $p_i = p_0$, $p_k = 1$ setzt.

Durch Integration nach Teilen folgt aus (200)

$$F_{ik} = \frac{1}{2}\int(p_i + p_i'')\,p_k\,\dot{\varphi} = \frac{1}{2}\int(p_k + p_k'')\,p_i\,\dot{\varphi} \tag{202}$$

oder, wenn man beachtet, daß $(p_i + p_i'')\,\dot{\varphi} = \dot{s}_i$ das Bogenelement ist (vgl. § 13 (e)),

$$\boxed{F_{ik} = \frac{1}{2}\int \dot{s}_i\,p_k = \frac{1}{2}\int \dot{s}_k\,p_i}\,. \tag{203}$$

Es gilt nun die folgende *Ungleichheit* MINKOWSKIS:

$$\boxed{F_{01}^2 - F_{00}F_{11} \geqq 0}\,. \tag{204}$$

Nimmt man $\mathfrak{K}_1$ als Einheitskreis, so geht (204) wegen (201) in die klassische isoperimetrische Ungleichheit $U_0^2 - 4\pi\,F_0 \geqq 0$ über. Wir wollen jetzt (204) nach dem Verfahren von § 11 beweisen.

Es handelt sich zunächst darum, ein Gegenstück zur Formel (142) von POINCARÉ zu finden. Wir betrachten eine feste Kurve $\mathfrak{K}_0$:

$$x_i = x_i(s);\quad x_1' = \cos\sigma,\quad x_2' = \sin\sigma \tag{205}$$

und eine zweite $\mathfrak{K}_1$:

(206) $$y_i = y_i(t);\ y_1' = \cos\tau,\ y_2' = \sin\tau.$$

Beide sollen auf ihre Bogenlängen bezogen sein. Wir wollen $\mathfrak{K}_1$ *parallel* zu sich verschieben und als Dichte für die Lagen von $\mathfrak{K}_1$ die Dichte eines mit $\mathfrak{K}_1$ verbundenen Aufpunktes $\mathfrak{z}$ einführen:

(207) $$z_i = x_i - y_i,\ \mathfrak{z} = \dot{z}_1 \dot{z}_2.$$

Dann finden wir

(208) $$\dot{z}_1 = \dot{s}\cos\sigma - \dot{t}\cos\tau,$$
$$\dot{z}_2 = \dot{s}\sin\sigma - \dot{t}\sin\tau;$$

(209) $$\mathfrak{z} = \dot{s}\dot{t}\sin(\sigma - \tau).$$

Daraus folgt

(210) $$\int n\mathfrak{z} = \int \dot{s}\dot{t}\,|\sin(\sigma-\tau)|,$$

wenn n die Anzahl der Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_0$ mit $\mathfrak{K}_1$ bedeutet.

Nehmen wir jetzt $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ als Eilinien mit den Stützfunktionen $p_0(\varphi)$ und $p_1(\varphi)$, so finden wir aus (210) durch Ausführung der Integration nach $\dot{t}$, wobei sich die doppelte „Breite" von $\mathfrak{K}_1$ in Richtung φ ergibt,

(211) $$\int n\mathfrak{z} = 2\int \dot{s}\{p_1(\varphi) + p_1(\varphi+\pi)\}.$$

Wir führen die aus $\mathfrak{K}_1$ durch Spiegelung am Ursprung entstehende Eilinie $\mathfrak{K}_2$ mit der Stützfunktion

(212) $$p_2(\varphi) = p_1(\varphi+\pi)$$

ein. Dann ist nach (211) und (203)

(213) $$\int n\mathfrak{z} = 4(F_{01} + F_{02})$$

oder, wenn wir

(214) $$\int n\mathfrak{z} = 2M_2 + 4M_4 + 6M_6 + \cdots$$

setzen,

(215) $$2(F_{01} + F_{02}) = M_2 + 2M_4 + 3M_6 + \cdots$$

Es sei nun $\varrho_i\mathfrak{K}_2$ die größte zu $\mathfrak{K}_2$ ähnlich liegende Eilinie, die so parallel verschoben werden kann, daß sie in $\mathfrak{K}_0$ Platz hat, und $\varrho_u\mathfrak{K}_2$ die kleinste, die bei geeigneter Verschiebung $\mathfrak{K}_0$ enthält. Dann ist, wenn wir

(216) $$\varrho_i \leqq \varrho \leqq \varrho_u$$

nehmen, an Stelle von (215)

(217) $$2\varrho(F_{01} + F_{02}) = M_2 + 2M_4 + 3M_6 + \cdots,$$

worin M_i die „Anzahl“ der durch Verschiebung aus $\varrho\,\mathfrak{K}_2$ entstehenden Eilinien bedeutet, die mit $\mathfrak{K}_0$ genau i Punkte gemein haben. Andrerseits erfüllen die Aufpunkte $\mathfrak{z}$ wegen (216) den Eibereich $\mathfrak{K}_0 + \varrho\,\mathfrak{K}_2$, der nach (199) den Inhalt hat:

$$(218) \qquad F_{00} + 2\varrho\, F_{02} + \varrho^2 F_{11} = M_2 + M_4 + M_6 + \cdots.$$

Dabei ist $F_{22} = F_{11}$, da die Eilinien $\mathfrak{K}_1$ und $\mathfrak{K}_2$ durch Spiegelung am Ursprung auseinander entstehen. Aus (217), (218) folgt

$$(219) \qquad 2\varrho F_{01} - F_{00} - \varrho^2 F_{11} = M_4 + 2M_6 + 3M_8 + \cdots$$

und somit

$$(220) \qquad \left(\frac{F_{01}^2}{F_{11}} - F_{00}\right) - F_{11}\left(\frac{F_{01}}{F_{11}} - \varrho\right)^2 \geqq 0.$$

Darin steckt schon die Ungleichheit (204) von MINKOWSKI. Aber wir können auch hier eine Verschärfung wie in § 11 (159) herleiten. Wir haben nämlich

$$(221) \qquad \begin{aligned} \frac{F_{01}^2}{F_{11}} - F_{00} &\geqq F_{11}\left(\frac{F_{01}}{F_{11}} - \varrho_i\right)^2, \\ \frac{F_{01}^2}{F_{11}} - F_{00} &\geqq F_{11}\left(\varrho_u - \frac{F_{01}}{F_{11}}\right)^2 \end{aligned}$$

und daraus

$$(222) \qquad \boxed{F_{01}^2 - F_{00}F_{11} \geqq \tfrac{1}{4}F_{11}^2\,(\varrho_u - \varrho_i)^2}.$$

Aus dieser Formel[1]), die ebenfalls BONNESEN gefunden hat, folgt die *Einzigkeit*:

Es gilt
$$F_{01}^2 - F_{00}F_{11} = 0$$
nur für $\varrho_i = \varrho_u$, also nur, wenn $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}_1$ ähnlich liegen.

§ 16. Eine Formel im Stil von Crofton für Punktetripel.

Kehren wir nochmals zum Gegenstand von § 6 zurück und betrachten anstatt wie dort zwei jetzt drei Punkte $\mathfrak{x}_i = \{x_{i1}, x_{i2}\}$ und ihre drei Verbindungsgeraden $\mathfrak{g}_i$ derart, daß $\mathfrak{x}_i$ mit $\mathfrak{g}_k$ für $i \neq k$ vereinigt liegt $(i, k = 1, 2, 3)$.

Dann haben wir wie in § 2 (36)

$$(223) \qquad \left.\begin{aligned} x_{21}\cos\varphi_1 + x_{22}\sin\varphi_1 &= p_1, \\ x_{31}\cos\varphi_1 + x_{32}\sin\varphi_1 &= p_1 \end{aligned}\right\}\text{ und zyklisch.}$$

---

1) Vgl. W. BLASCHKE, Hamburg. Abhandlungen 1 (1922), S. 206—209.

Durch Ableitung folgt daraus

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}_{21}\cos\varphi_1+\dot{x}_{22}\sin\varphi_1&=-s_{21}\dot{\varphi}_1+\dot{p}_1,\\ \dot{x}_{31}\cos\varphi_1+\dot{x}_{32}\sin\varphi_1&=-s_{31}\dot{\varphi}_1+\dot{p}_1\end{aligned}\right\}\text{ und zyklisch.}\tag{224}$$

Darin ist zur Abkürzung gesetzt

$$\left.\begin{aligned}-x_{21}\sin\varphi_1+x_{22}\cos\varphi_1&=s_{21},\\ -x_{31}\sin\varphi_1+x_{32}\cos\varphi_1&=s_{31}\end{aligned}\right\}\text{ und zyklisch}\tag{225}$$

und die Bedeutung dieser Strecken ist aus unserer Fig. 11 zu ersehen. Es ist nämlich

$$s_{31}-s_{21}=s_1 \quad \text{und zyklisch}\tag{226}$$

gleich den Dreiecksseiten unseres Dreiecks.

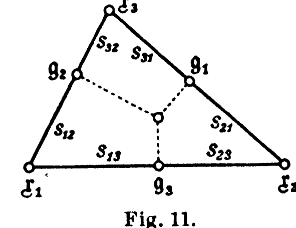


Fig. 11.

Wir multiplizieren nun die sechs Ausdrücke (224) links in folgender Weise:

$$\{(2)\ (3)\}\ \{(4)\ (5)\}\ \{(6)\ (1)\}$$

und rechts so: $\{(1)\ (2)\}\ \{(3)\ (4)\}\ \{(5)\ (6)\}$.

Dann erhalten wir

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3\sin\alpha_1\sin\alpha_2\sin\alpha_3=\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3\,s_1s_2s_3.\tag{227}$$

Darin ist z. B.

$$\mathfrak{x}_1=\dot{x}_{11}\dot{x}_{12},\quad \mathfrak{g}_1=\dot{p}_1\dot{\varphi}_1,\quad \varphi_3-\varphi_2=\pi-\alpha_1\tag{228}$$

gesetzt.

Nun ist bekanntlich, und wie man leicht bestätigt, beim Dreieck

$$\frac{s_i}{\sin\alpha_i}=D,\tag{229}$$

dem Durchmesser des Umkreises. Deshalb schreibt sich unsere Formel (228) auch so:

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3=D^3\,\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\mathfrak{g}_3.\tag{230}$$

Hieraus folgt z. B. für einen Eibereich K aus CROFTONs Formel (60)

$$\boxed{\int\limits_{\mathfrak{x}_i<\mathfrak{K}}\frac{\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3}{D^3}=U^3}.\tag{231}$$

Damit ist auch das Vorhandensein (absolute Konvergenz) des uneigentlichen Integrals links gesichert ($D\geqq 0$).

Die Herleitung von (227) gilt auch für n-Ecke und gibt

$$\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\ldots\mathfrak{x}_n\sin\alpha_1\sin\alpha_2\ldots\sin\alpha_n=\mathfrak{g}_1\mathfrak{g}_2\ldots\mathfrak{g}_n\,s_1s_2\ldots s_n.\tag{232}$$

§ 17. Aufgaben und Lehrsätze.

In diesem Abschnitt soll kurz über einige Ergebnisse und Fragen berichtet werden, die in Zusammenhang mit den in diesem ersten Teil behandelten Gegenständen stehen.

1. Zur Berechnung gewisser in der Integralgeometrie auftretender Integrale erweist sich der folgende von G. HERGLOTZ in seiner Vorlesung von 1933 angegebene Satz als nützlich. Es sei die Funktion $f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n)$ abhängig von n Punkten in der Ebene und sei 1. symmetrisch in diesen Punkten und 2. für $t > 0$ homogen von Grad p:

$$f(t\mathfrak{x}_1, t\mathfrak{x}_2, \ldots, t\mathfrak{x}_n) = t^p f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \ldots, \mathfrak{x}_n). \tag{233}$$

Dann gilt für Integration über einen Eibereich $\mathfrak{K}$:

$$\begin{aligned} \int f(\mathfrak{x})\,\mathfrak{x} &= \frac{1}{p+2}\int f(\mathfrak{x})\,\dot{s}, \\ \int f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2)\,\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2 &= \frac{2}{p+4}\int f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2)\,\dot{s}\,\dot{\mathfrak{x}}_2, \\ \int f(\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3)\,\mathfrak{x}_1\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3 &= \frac{3}{p+6}\int f(\mathfrak{x}, \mathfrak{x}_2, \mathfrak{x}_3)\,\dot{s}\,\mathfrak{x}_2\mathfrak{x}_3. \end{aligned} \tag{234}$$

Dabei wird immer eine Flächenintegration über $\mathfrak{K}$ ersetzt durch eine Integration über den Rand von $\mathfrak{K}$, indem rechts $\dot{s}$ das Bogenelement an der Stelle $\mathfrak{x}$ dieses Randes bedeutet. Derartige Integrale sind die in § 8 mit T_k bezeichneten und im folgenden das Integral G in (249). Der Beweis von HERGLOTZ arbeitet mit der Ersetzung der Randlinie durch eine benachbarte Parallele.

2. Unter den Ergebnissen CROFTONs von 1868 mag noch das folgende erwähnt werden. Es seien $\mathfrak{K}_0$ und $\mathfrak{K}$ zwei Eibereiche, von denen $\mathfrak{K}_0$ ganz innerhalb von $\mathfrak{K}$ liegt, so daß $\mathfrak{K} - \mathfrak{K}_0 = \mathfrak{R}$ ein Ringgebiet ist. ω sei der Winkel, unter dem man von einem Punkt $\mathfrak{x}$ aus (außerhalb $\mathfrak{K}_0$) K_0 sieht $(0 < \omega < \pi)$.

Dann ist

$$\int_{\mathfrak{R}} \omega\,\mathfrak{x} = \pi\,(R - 2\bar{A}). \tag{235}$$

Dabei bedeutet R den Flächeninhalt von $\mathfrak{R}$ und $\bar{A}$ die mittlere Fläche, die von den Tangenten in Richtung φ an $\mathfrak{K}_0$ von $\mathfrak{K}$ abgeschnitten wird (Fig. 12):

$$\bar{A} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} A\,d\varphi. \tag{236}$$

Man beweist dies, indem man die „Anzahl“ der Schnittpunkte berechnet zwischen den Geraden, die $\mathfrak{K}_0$ treffen, und allen Geraden der Ebene, soweit diese Schnittpunkte in $\mathfrak{K}$ liegen. Vergleiche auch R. DELTHEIL, Probabilités géométriques, Paris 1926, S. 79. Nebenbei: Für die Dichte der Schnittpunkte zwischen den Geraden, die eine Eilinie $\mathfrak{K}$ schneiden und denen, die sie nicht schneiden, findet CROFTON den Ausdruck $2\sin\omega$.

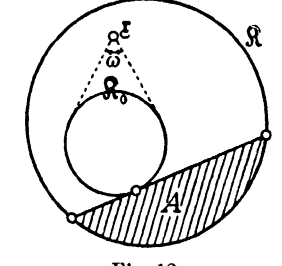


Fig. 12.

3. Es sei $\mathfrak{K}$ ein fester Eibereich, $\mathfrak{S}$ eine bewegliche Strecke auf der beweglichen Geraden $\mathfrak{g}$ von der festen Länge l, λ sei die Länge der Strecke $\mathfrak{S}\mathfrak{K}$ und s die Länge der Sehne $\mathfrak{g}\mathfrak{K}$ (Fig. 13). Dann besteht folgende Beziehung:

$$\int \lambda^n \mathfrak{S} = l S_n - \frac{n-1}{n+1} S_{n+1}. \tag{237}$$

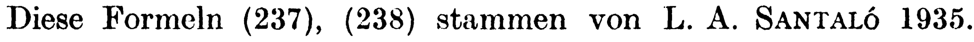
Dabei bedeutet $\mathfrak{S}$ die kinematische Dichte von $\mathfrak{S}$ und S_n das in § 8 eingeführte Integral (101). Insbesondere ist

$$\int \lambda^3 \mathfrak{S} = 3\,(1-\bar{t})\,F^2, \tag{238}$$

wenn $\bar{t}$ den mittleren Abstand zweier Punkte von $\mathfrak{K}$ bedeutet, also nach (102):

$$\bar{t} = \frac{1}{F^2} \int\limits_{\mathfrak{x}_i < \mathfrak{K}} t\,\mathfrak{x}_1\,\mathfrak{x}_2 = \frac{T_1}{F^2}. \tag{239}$$

Fig. 13.


Diese Formeln (237), (238) stammen von L. A. SANTALÓ 1935.

4. Es sei $\mathfrak{K}$ eine feste Eilinie, r eine Strecke $\geqq$ dem Durchmesser von $\mathfrak{K}$ (Durchmesser = größte Entfernung zweier Punkte von $\mathfrak{K}$). Um jeden Punkt $\mathfrak{x}$ außerhalb $\mathfrak{K}$ schlagen wir einen Kreis mit dem Halbmesser r. Die (durch den Winkel gemessene) Anzahl aller Halbmesser dieses Kreises, die mit der Eilinie genau einen Punkt gemein haben, sei ω_1; die Anzahl derer, die genau zwei Punkte gemein haben, sei ω_2 (Fig. 14). Dann ist (nach SANTALÓ 1935)

$$\int \omega_1 \mathfrak{x} = 2\pi F, \tag{240}$$

$$\int \omega_2 \mathfrak{x} = 2\,(r\,U - \pi F). \tag{241}$$

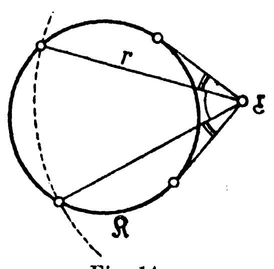
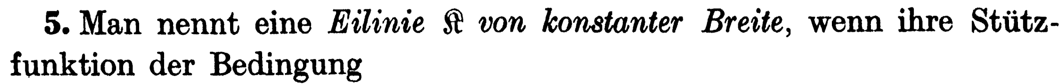


Fig. 14.

Darin bedeuten F und U Flächeninhalt und Umfang von $\mathfrak{K}$.


5. Man nennt eine *Eilinie* $\mathfrak{K}$ *von konstanter Breite*, wenn ihre Stützfunktion der Bedingung

$$p(\varphi) + p(\varphi + \pi) = \text{konst.} \tag{242}$$

genügt, wenn also parallele Stützgeraden feste Entfernung haben. Die „Wahrscheinlichkeit", daß zwei Schnittgeraden $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{g}'$ von $\mathfrak{K}$ sich unter einem Winkel $\omega \leqq \alpha$ treffen, ist (nach SANTALÓ 1935)

$$\omega = \frac{2\alpha}{\pi}. \tag{243}$$

6. Den Invarianzsatz von § 4 kann man von der Optik auf die Kinematik erweitern. Es sei $\mathfrak{K}_0$ eine feste und $\mathfrak{K}_1$ eine bewegliche Kurve. Beide sollen sich in einem Punkt $\mathfrak{x}$ treffen. Hier werde $\mathfrak{K}_1$ an der Tangente in $\mathfrak{x}$ an $\mathfrak{K}$ in eine Kurve $\mathfrak{K}_2$ gespiegelt. Dann besteht zwischen den kinematischen Dichten von $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ die Beziehung

$$\mathfrak{K}_1 + \mathfrak{K}_2 = 0. \tag{244}$$

Vgl. (130) in § 10.

7. A. Es sei $\mathfrak{K}_0$ ein fester und $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$ seien n bewegliche Eibereiche, F_i der Flächeninhalt von $\mathfrak{K}_i$ und F der Flächeninhalt des Durchschnitts aller K_i; $i = 0, 1, \ldots, n$; endlich $\mathfrak{K}_i$ die kinematische Dichte von $\mathfrak{K}_i$. Dann ist

$$\int F\,\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{K}_2 \ldots \mathfrak{K}_n = (2\pi)^n F_0 F_1 \ldots F_n. \tag{245}$$

Es sei ferner U der Umfang des Durchschnitts $\mathfrak{K}_0\,\mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n$. Für ihn gilt

$$\begin{aligned}\int U\,\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{K}_2 \ldots \mathfrak{K}_n = (2\pi)^n \{ & U_0 F_1 F_2 \ldots F_n + F_0 U_1 F_2 \ldots F_n \\ & + F_0 F_1 U_2 \ldots F_n + F_0 F_1 F_2 \ldots U_n\}.\end{aligned} \tag{246}$$

B. Betrachten wir alle Lagen $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2, \ldots, \mathfrak{K}_n$ derart, daß der Durchschnitt $\mathfrak{K}_0\,\mathfrak{K}_1 \ldots \mathfrak{K}_n \neq 0$ ist, so finden wir

$$\begin{aligned}&\int \mathfrak{K}_1\,\mathfrak{K}_2 \cdots \mathfrak{K}_n = \\ &= (2\pi)^n (F_1 F_2 \cdots F_n + F_0 F_3 \cdots F_n + \cdots + F_0 F_1 \cdots F_{n-1}) \\ &\quad + (2\pi)^{n-1} (U_0 U_1 F_2 \cdots F_n + U_0 F_1 U_2 \cdots F_n + \cdots + F_0 F_1 \cdots U_{n-1} U_n).\end{aligned} \tag{247}$$

Konvexität der Linien ist dabei nicht nötig.

C. Es sei $\mathfrak{K}_0$ ein fester Eibereich und $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ bewegliche Linien und n die Anzahl der Schnittpunkte $\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{K}_2$ innerhalb $\mathfrak{K}_0$ (Fig. 15). Dann ist

$$\boxed{\int n\,\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{K}_2 = 8\pi F_0\, U_1\, U_2}. \tag{248}$$

Vgl. L. A. SANTALÓ, Hamburg. Abhandlungen 11 (1935), S. 231 ff.

Fig. 15.

8. Man stelle die zu (245)—(248) entsprechenden Formeln auf für den Fall, daß die $\mathfrak{K}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) nur parallel verschoben werden (vgl. § 15).

9. Fragen von folgender Art scheinen ziemlich schwierig zu sein. Es sei eine unendliche Folge von Zahlen $S_k > 0$; $k = 0, 1, 2, \ldots$ gegeben. Welches sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, daß es dazu einen Eibereich $\mathfrak{K}$ gibt derart, daß die S die zugehörigen in § 8 betrachteten Integrale der Sehnenpotenzen

$$S_k = \int s^k \mathfrak{g} \tag{101}$$

sind? Falls zu vorgeschriebenen S_k ein Eibereich $\mathfrak{K}$ vorhanden ist, wieweit ist er durch die S_k bestimmt? Teilergebnisse in § 11 (156).

10. Es sei $\mathfrak{K}$ ein Eibereich und $|\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3|$ die absolut genommene Dreiecksfläche mit den Ecken $\mathfrak{p}_i$. Für das Integral

$$G = \int_{\mathfrak{p}_i < \mathfrak{K}} |\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3| \, \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \tag{249}$$

gelten die Beziehungen

$$4 \frac{G}{F^4} \geqq \frac{35}{12\pi^2} = 0.2955 \ldots, \tag{250}$$

$$4 \frac{G}{F^4} \leqq \frac{1}{3} = 0.333 \ldots. \tag{251}$$

Dabei gilt in (250) das Gleichheitszeichen nur dann, wenn $\mathfrak{K}$ von einer Ellipse, und in (251), wenn $\mathfrak{K}$ von einem Dreieck berandet ist. W. BLASCHKE, Über affine Geometrie 11. Lösung des „Vierpunktproblems" von SYLVESTER ..., Berichte der math.-phys. Kl., Leipzig **69** (1917), S. 436—453 und W. BLASCHKE, Vorlesungen über Differentialgeometrie **2** (1923), S. 55—57. Es wäre wünschenswert, diese Beweise umzugestalten in der Art von SANTALÓ (§ 11, § 13).

11. Es sei $\mathfrak{K}_0$ ein fester Eibereich und $\mathfrak{S}$ ein von zwei parallelen Geraden im Abstand b begrenzter beweglicher Streifen. Als Dichte $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{S}$ können wir die einer seiner Begrenzungsgeraden nehmen. f sei der Flächeninhalt des Durchschnittes $\mathfrak{K}_0 \mathfrak{S}$ und l die Länge seines Umfangs. Dann hat SANTALÓ 1935 folgende Beziehungen entdeckt:

$$\int f \mathfrak{S} = \pi b F_0, \tag{252}$$

$$\int l \mathfrak{S} = 2\pi F_0 + \pi b U_0 \tag{253}$$

und für die „Gesamtzahl" der Streifen, die $\mathfrak{K}_0$ treffen,

$$\int \mathfrak{S} = U_0 + \pi b. \tag{254}$$

Darin bedeuten F_0 und U_0 Fläche und Umfang von $\mathfrak{K}_0$.

12. Die Lage eines Achsenkreuzes $\mathfrak{X}$ in der Ebene kann man festlegen durch Angabe von Drehpunkt $\mathfrak{z}$ und Drehwinkel φ der Drehung, die ein

festes Achsenkreuz $\mathfrak{X}_0$ nach $\mathfrak{X}$ bringt. Dann ergibt sich für die kinematische Dichte

$$\mathfrak{X} = 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cdot \mathfrak{z} \dot{\varphi}. \tag{255}$$

13. Ein Achsenkreuz $\mathfrak{X}$ in der Ebene gehe aus einem festen $\mathfrak{X}_0$ dadurch hervor, daß man $\mathfrak{X}_0$ erst an einer Geraden $\mathfrak{g}$ spiegelt und dann längs $\mathfrak{g}$ um die Strecke h verschiebt. Dann ist die kinematische Dichte

$$\mathfrak{X} = 2 \mathfrak{g} \dot{h}. \tag{256}$$

14. Es sei $\mathfrak{K}$ eine feste Kurve und $\mathfrak{g}$ eine bewegliche Gerade, die aus $\mathfrak{K}$ die n Schnittpunkte mit den Koordinaten x_{ik}; $i = 1, 2, \ldots, n$; $k = 1, 2$ ausschneidet. Dann sind

$$\xi_k = \frac{\int \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \mathfrak{g}}{\int n \mathfrak{g}} = \frac{1}{2L} \int \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \mathfrak{g} \tag{257}$$

die Schwerpunktskoordinaten der homogen mit Masse belegten Linie $\mathfrak{K}$.

15. Es sei $\mathfrak{M}_0$ ein festes Gebiet und $\mathfrak{g}$ eine bewegliche Gerade. Der Durchschnitt $\mathfrak{g}\mathfrak{M}_0$ habe die Gesamtlänge s und homogen mit Masse belegt den Schwerpunkt mit den Koordinaten ξ_k. Dann ist (vgl. (110))

$$\eta_k = \frac{\int s \xi_k \mathfrak{g}}{\int s \mathfrak{g}} = \frac{1}{\pi F_0} \int s \xi_k \mathfrak{g}, \tag{258}$$

wenn F_0 der Flächeninhalt von $\mathfrak{M}_0$ und und η_k die Schwerpunktkoordinaten des homogenen Gebiets $\mathfrak{M}_0$ sind.

16. Es sei $\mathfrak{K}_0$ eine feste und $\mathfrak{K}$ eine starr bewegliche Linie. x_{ik}; $i = 1, 2, \ldots n$; $k = 1, 2$ die Koordinaten der Schnittpunkte von $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}$. Dann gilt für die Schwerpunktskoordinaten ξ_k der homogenen Kurve $\mathfrak{K}_0$

$$\xi_k = \frac{\int \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \mathfrak{K}}{\int n \mathfrak{K}} = \frac{1}{4 L_0 L} \int \sum_{i=1}^{n} x_{ik} \mathfrak{K}, \tag{259}$$

wenn L_0, L die Längen von $\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}$ bedeuten. Vgl. (142).

17. Es sei $\mathfrak{M}_0$ ein fester Bereich, $\mathfrak{K}$ eine starr bewegliche Linie, l die Gesamtlänge des Durchschnitts $\mathfrak{M}_0 \mathfrak{K}$ und ξ_k die Schwerpunktskoordinaten der homogenen Kurve $\mathfrak{M}_0 \mathfrak{K}$. Dann gilt für die Schwerpunktskoordinaten η_k des homogenen Bereichs $\mathfrak{M}_0$ (vgl. (194))

$$\eta_k = \frac{\int l \xi_k \mathfrak{K}}{\int l \mathfrak{K}} = \frac{1}{2 \pi F_0 L} \int l \xi_k \mathfrak{K}. \tag{260}$$

18. Es sei $\mathfrak{K}_0$ ein fester und $\mathfrak{K}_1$ ein starr beweglicher Bereich, F_{01} der Flächeninhalt ihres Durchschnitts $\mathfrak{K}_0\mathfrak{K}_1$ und ξ_k die Schwerpunktkoordinaten dieses homogen mit Masse belegten Durchschnitts $\mathfrak{K}_0\mathfrak{K}_1$. Dann sind

$$\eta_k = \frac{\int F_{01}\,\xi_k\,\mathfrak{K}_1}{\int F_{01}\,\mathfrak{K}_1} = \frac{1}{2\pi F_0 F_1}\int F_{01}\,\xi_k\,\mathfrak{K}_1 \tag{261}$$

die Schwerpunktkoordinaten des homogenen Eibereichs $\mathfrak{K}_0$. Vgl. (188).

19. Es sei $\mathfrak{M}_0$ ein fester Bereich; $\mathfrak{K}_1, \mathfrak{K}_2$ zwei starr bewegliche Kurven mit den Schnittpunktskoordinaten x_{ik}; $i = 1, \ldots n$; $k = 1, 2$. Dann gilt für die Schwerpunktskoordinaten des homogenen Bereichs $\mathfrak{M}_0$

$$\eta_k = \frac{\int \sum_{i=1}^{n} x_{ik}\,\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{K}_2}{\int n\,\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{K}_2} = \frac{1}{8\pi F_0 U_1 U_2}\int \sum_{i=1}^{n} x_{ik}\,\mathfrak{K}_1\,\mathfrak{K}_2. \tag{262}$$

Die Bezeichnung ist dabei dieselbe wie in (248).

20. Ist (in der Bezeichnung von § 13) für eine Kurve $\mathfrak{K}_0$ die „Anzahl" $J_n > 0$, aber $J_{n+i} = 0$ für $i > 0$, so könnte man n die „kinematische Ordnung" von $\mathfrak{K}_0$ nennen. Die Kreise sind dann unter den Eilinien durch die kinematische Ordnung 2 gekennzeichnet. Was läßt sich über die Eilinien der kinematischen Ordnung 4 aussagen?

Schriftenverzeichnis.

Die erste Behandlung des sogenannten Nadelproblems durch den berühmten Naturgeschichtschreiber BUFFON (1707—1788) findet sich in:

G. L. L. BUFFON, Essai d'arithmétique morale, Suppl. à l'Histoire Natur. IV, Paris 1877.

Das Problem taucht wieder auf bei:

P. S. LAPLACE, Théorie analytique des probabilités. Paris 1812. S. 359—62.
E. BARBIER, Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert. Liouv. Journ. (II), **5** (1860), S. 273—86.

Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeiten wurden dann hauptsächlich in England untersucht, vor allem von

M. W. CROFTON, On the theory of local probability. Transact. of the Royal Soc. of Lond. **158** (1868), S. 181—99.
M. W. CROFTON, Geometrical theorems related to mean values. Proc. of the Lond. Math. Soc. **8** (1877), S. 304—309.
M. W. CROFTON, Artikel „Probability" in der Encyclop. Britannica. 9. edit., vol. **19** (1885), S. 784—788.
J. J. SYLVESTER, On a funicular solution of Buffon's problem of the needle. Acta Math. **14** (1890), S. 185—205 (= Coll. Pap. IV, S. 663—79).

Über CROFTON (1826—1915) s.

Obit. Note of M. W. CROFTON, Proc. of the Lond. Math. Soc. (2) **14** (1915).

Eine große Anzahl von Aufgaben über geometrische Wahrscheinlichkeiten findet sich in fast jedem Jahrgang der

Educational Times von den Anfängen der Zeitschrift (Bd. **1**, 1864) bis in den Beginn des 20. Jahrhunderts. Ein großer Teil solcher Probleme ist auch gesammelt in dem Buch:
E. CZUBER, Geometrische Wahrscheinlichkeiten und Mittelwerte. Leipzig 1884.

Vgl. weiter:

E. CZUBER, Zur Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten. Wiener Ber. **90** (1887), S. 719—42.
J. LENGAUER, Geometrische Wahrscheinlichkeitsprobleme. Progr. Gymn. Würzburg 1899.
H. HAPPEL, Einige Probleme über geometrische Wahrscheinlichkeiten. Ztschr. f. Math. u. Phys. **61** (1912), S. 43—56.
L. LALANNE, De l'emploi de la géométrie, pour résoudre certaines questions de moyennes et de probabilités. Liouv. Journ. (III) **5** (1879), S. 107—130.

S. auch die Darstellung über das Gebiet bei

E. CZUBER, Bericht über die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer Anwendungen. Jahresber. d. Dt. Math.-Ver. **7** (1899) Nr. 24—30, S. 47—65,

sowie die üblichen Lehrbücher der Wahrscheinlichkeitsrechnung, bes.:

E. CZUBER, Wahrscheinlichkeitsrechnung. I, 4. Aufl. Leipzig 1924, S. 80—118.
O. KNOPF, Wahrscheinlichkeitsrechnung. II. Samml. Göschen. 1871, S. 1—30.

E. **Borel**, Calcul des probabilités. Paris 1924 (= Traité du calcul des probab. et de ses applic. tome I, fasc. I).
H. **Poincaré**, Calcul des probabilités. 2. édit., Paris 1912.

Eine gute Darstellung, worin auch die Beziehung zur Theorie der Integralinvarianten hervortritt, ist:

R. Deltheil, Probabilités géométriques. Paris 1926 (= Traité du calcul des probab. et de ses applic. tome II, fasc. II).

Weitere neuere Arbeiten sind:

H. Lebesgue, Exposition d'un mémoire de M. W. Crofton. Nouv. Ann. (4) **12**, (1912), S. 482—502.
W. Blaschke, Lösung des 4-Punktproblems von Sylvester. Leipz. Ber. **69** (1917), S. 436—53.
G. Polya, Über geometrische Wahrscheinlichkeiten. Wiener Ber. **126** (1917), S. 319—328.
G. Polya, Über geometrische Wahrscheinlichkeiten an konvexen Körpern. Leipz. Ber. **69** (1917), S. 457—58.
B. Hostinský, Sur les probabilités géométriques. Spisy prirod. fak. Masar. Univ. Brno **50** (1925).
B. Hostinský, Problèmes relatives à la position d'une sphère à centre fixe. Liouv. Journ. (9) **8** (1929), S. 35—43.
R. Deltheil, Probabilités géométriques. Scientia **52** (1932), S. 1—10.
H. Favard, Une définition de la longueur et de l'aire. C. R. **194** (1932), S. 344—46.
G. van der Lijn, Sur la mesure d'un ensemble autre qu'un ens. de points et son appl. au probl. de Buffon. Bull. Soc. Roy. de Liège **2** (1933).

Unter dem Obertitel „*Integralgeometrie*" sind ferner bisher die folgenden Arbeiten erschienen oder im Druck:

W. Blaschke, Integralgeometrie 1, Ermittlung der Dichten für lineare Unterräume im E_n. Actualités scientifiques et industrielles **252**, Paris 1935, Hermann & Cie.
W. Blaschke, Integralgeometrie 2. Zu Ergebnissen von M. W. Crofton. Bulletin Mathématique de la Société Roumaine des Sciences **37** (1935), S. 3—11.
O. Varga, Integralgeometrie 3. Croftons Formeln für den Raum; Mathematische Zeitschrift (1935).
L. A. Santaló, Geometria Integral 4. Sobre la medida cinemática en el plano. Abhandlungen aus dem Math. Seminar Hamburg **11** (1935), S. 222—236.
L. A. Santaló, Integralgeometrie 5. Über die kinematische Dichte im Raum. Actualités scientifiques et industrielles **257**, Paris 1935, Hermann & Cie.
B. Petkantschin, Integralgeometrie 6. Zusammenhänge zwischen den Dichten der linearen Unterräume im n-dimensionalen Raum; Abhandlungen aus dem Math. Seminar Hamburg **11** (1935), S. 249—310.

Eine weitere Arbeit von Santaló (Integralgeometrie 7) erscheint nächstens in einer spanischen Zeitschrift.

Namen und Stichworte.

Die Zahlen beziehen sich auf die Seiten.

Achsenkreuz 20
Alternierendes Produkt § 1
Anzahl von Punkten und Geraden 1, § 2
— der Geraden, die eine Kurve treffen § 3
— der Strecken, die einen Eibereich treffen § 12
— der beweglichen Eibereiche, die einen festen treffen § 13
ARCHIMEDES 12
Ausdehnungslehre 4
Ausrichtung = Orientierung 8

Bewegungsinvarianz 5, 6, 21
BLASCHKE (der Verfasser zitiert sich selbst) 33, 36, 41, 45
BONNESEN 12, 27, 33, 36
Breite 35
—, konstante 39
BRUNN 33

CARTAN, E. 4, 14
CAUCHYS Formel für den Umfang 11 (61), 29
CROFTON 2, 9, § 2—8, 38, 39, 44
—s Formel für die Bogenlänge 11
—s Formeln für Eilinien § 7
CZUBER 2, 44

DELTHEIL 2, 39, 45
Dichte, kinematische § 9
Dichten für Punkte und Geraden § 2
— für Achsenkreuze § 9
—, Vorzeichen 10
— für Schnittpunkte 18

Eilinie 11
— von konstanter Breite 39
Einfallswinkel 13
Existenzbeweis 20

FAVARD 12, 45
FENCHEL 12, 27, 33
Formel von POINCARÉ § 10
—n von SANTALÓ (180), (184), (188), (194), (248)
— von STEINER (150)
Funktionaldeterminante 3

Geradendichte § 2
Geradenpaare § 6
Gleichung, isoperimetrische, von SANTALÓ (152)
GRASSMANN 4

HERGLOTZ 2, 38
HESSE 8
Hülle, konvexe 12
Hyperbel 15

Inkreis 25
Invarianzsatz der Optik § 4
Isoperimetrie des Kreises § 11, 31, § 15

KÄHLER 4
Kinematische Dichte § 9
— Ordnung 43
Konvexe Hülle 12
Krümmung einer Kurve 13
Krümmungshalbmesser 29 (f)

LEBESGUE 12, 17, 45
LEIBNIZ 3

Maß, von Punkten und Geraden § 2
—, kinematisches § 9
MINKOWSKI § 15
Momentenproblem 41 (Nr. 9)

Nadelproblem von BUFFON 1
NEWTON 4
Normalform HESSES 8

Ordnung = Realitätsordnung 10
—, kinematische 43
Orientierung = Ausrichtung 8

Parallelkurve 26
POINCARÉ 4, 9, 14, 20, § 10
Polarenbildung 34
Punktdichte § 2
Punktepaare § 6
Punktetripel § 16

Realitätsordnung 10

SANTALÓ 20, § 11—14, § 17
Satz über Vertauschbarkeit der Integrationen 4 (12)
Schiebung 5
Sehnen, Sehnenpotenzen § 8, 41
Seilliniensatz § 5
Selbstpotential 20
SNELLIUS 13
Spiegelung an einer Kurve 14, 40
Stützfunktion 12
STEINER 1, 26, 31, 33
SYLVESTER 16, 41, 44

Treffgeraden zweier Eilinien § 5

Umkehrinvarianz 21, 32
Umkreis 25
Ungleichheit, isoperimetrische (156)
— von BONNESEN (159), (222)
— von MINKOWSKI (204)

Vereinbarung über alternierende Produkte 3
Verrückung 8
Verschärfung von BONNESEN (159), (222)
— von SANTALÓ (152)
Vertauschbarkeit der Integrationen 4
Vielecke 24

Wahrscheinlichkeit, geometrische 1
Wahlinvarianz 6, 21

Bisher sind in dieser Sammlung erschienen:

1. *J. Hjelmslev,* Die natürliche Geometrie. 1923. [Vergr.]
2. *H. Tietze,* Über Analysis Situs. 1923. *RM* 1.—.
3. *W. Wirtinger,* Allgemeine Infinitesimalgeometrie und Erfahrung. 1926. *RM* 1.—.
4. *W. Blaschke,* Leonardo und die Naturwissenschaften. Rektorrede. 1928. *RM* 1.—.
5. *D. Hilbert,* Die Grundlagen der Mathematik. Mit Zusätzen von *H. Weyl* und *P. Bernays.* 1928. *RM* 1.—.
6. *J. Radon,* Zum Problem von Lagrange. Vier Vorträge. 1928. *RM* 2.—.
7. *E. Sperner,* Neuer Beweis für die Invarianz der Dimensionszahl und des Gebietes. 1928. *RM* 1.—.
8. *O. Neugebauer,* Über vorgriechische Mathematik. 1929. *RM* 2.—.
9. *J. Dubourdieu,* Sur les Réseaux de courbes et de surfaces. 1930. *RM* 5.—.
10. *O. Schreier* und *E. Sperner,* Einführung in die analytische Geometrie und Algebra. I, 1931. Geh. *RM* 8.—; geb. *RM* 9.60.
11. *E. Artin,* Einführung in die Theorie der Gammafunktion. 1931. *RM* 2.—.
12. *O. Schreier* und *E. Sperner,* Vorlesungen über Matrizen. 1932. *RM* 5.—.
13. *W. Blaschke,* Wissenschaftspflege im Ausland. 1933. *RM* 1.—.
14. *E. Sperner,* Über die fixpunktfreien Abbildungen der Ebene. 1933. *RM* 2.—.
15. *G. Thomsen,* Grundlagen der Elementargeometrie in gruppenalgebraischer Behandlung. 1933. Geh. *RM* 4.50; geb. *RM* 5.50.
16. *E. Kähler,* Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen. 1934. Geh. *RM* 4.—; geb. *RM* 5.—.
17. *L. Sobrero,* Theorie der ebenen Elastizität. Unter Benutzung eines Systems hyperkomplexer Zahlen. 1934. *RM* 4.—.
18. *W. Blaschke,* Über das Studium von Mathematik und Naturwissenschaften. 1935. Geh. *RM* —.60.
19. *O. Schreier* und *E. Sperner,* Einführung in die analytische Geometrie und Algebra. II, 1935. Geh. *RM* 8.—; geb. *RM* 9.60.
20. *W. Blaschke,* Vorlesungen über Integralgeometrie. Erstes Heft, 1935. Geh. *RM* 4.—.